No:14
Genita

SRIRANBIR LIBRARY
NO.
JAMMOO

॥ हिन्दी बीजगणित ॥

दूसरा भाग

जिसको

पश्चिमोत्तरीय ज़िलों की पाठशालाओं के विद्यार्थि
यों के लिये पण्डित मोहनलाल ने अंग्रेज़ी से
हिन्दी भाषा में उलथा किया

अवधदेश के डैरेक्टर आफ़ पब्लिक
इन्स्ट्रक्शन श्रीयुत विलियम हैन्डफ़ोर्ड साहिब बहा
दुर के हुक्म से

स्थान लखनऊ
मतबअ मुन्शी नवल किशोर में छापा गया
सन् १८६५ ई०

Beza Gentia No. 14

14 6364.

॥ हिन्दी बीज गणित के दूसरे भाग का सूचीपत्र ॥

आशय	पृष्ठ	पंक्ति
दोवर्ण एक घात समीकरण जिस में दो दो अव्यक्त राशि मिली हों ······	१	३
क्रिया समेत दो वर्ण एक घात संबंधी प्रश्न ······	१३	९
परीक्षा के लिये दोवर्ण एक घात संबंधी प्रश्न ····	२२	२४
घात क्रिया ······	२५	१३
क्रिया समेत घात क्रिया संबंधी प्रश्न ······	२८	८
परीक्षा के लिये घात क्रिया संबंधी प्रश्न ······	३०	४
मूल क्रिया ······	३०	२०
क्रिया समेत मूल क्रिया संबंधी प्रश्न ······	३१	१५
परीक्षा के लिये मूल क्रिया संबंधी प्रश्न ······	३२	५
वर्ग समीकरण ······	३२	२०
क्रिया समेत वर्ग समीकरण संबंधी प्रश्न ······	३८	२१
परीक्षा के लिये वर्ग समीकरण सबन्धी प्रश्न ··	४०	६
सबन्ध १ अनुपात २ ध्रुवराशि ३ चलराशि ४ ··	६५	११
योगज श्रेढ़ी और अन्तर श्रेढ़ी ··	७९	१६
गुणोत्तर श्रेढ़ी ······	८८	८
क्रिया सहित श्रेढ़ी संबंधी प्रश्न ······	८९	६
परीक्षा के लिये श्रेढ़ी सबंधी प्रश्न ······	९५	११

PRATAP SINGH MUSEUM
SRINAGAR
3070

॥ हिन्दी बीजगणित ॥

॥ दूसरा भाग ॥

॥ दो वर्ण एक घात समीकरण ॥

५५ प्र० जो केवल एक समीकरण में दो अव्यक्त राशि य और र हों जैसे २य + ३र = २० तो पक्षान्तरानयन से २य = २०—३र और २ का भाग देने से य = १० — $\frac{३र}{२}$ परन्तु इस समीकरण में य का मान व्यक्त नहीं है कारण यह है कि उसके मान के एक पद में र अव्यक्त राशि मिली है इसलिये जो एक और समीकरण हो जैसा ३य + २र = २५ और उसमें य और र राशियों के मान जो पूर्व समीकरण में हों रखने से उस समी करण की समता बनी रहे तो

∵ ३य + २र = २५

∵ पक्षान्तरानयन से   ३य = २५ — २र

३ का भाग देने से   य = $\frac{२५}{३}$ — $\frac{२र}{३}$

और पूर्व समीकरण में य का मान १० — $\frac{३र}{२}$ निकाला है और दोनों समीकरण में य का एक ही मान कल्पना किया है इस कारण दोनों मान य राशि के तुल्य हैं वा १० — $\frac{३र}{२}$ = $\frac{२५}{३}$ — $\frac{२र}{३}$

इस समीकरण में केवल एक ही य राशि अव्यक्त है समीकरण के दोनों पक्षों की राशियों को २×३ व ६ से गुणा किया तो   ६० — ६र = ५० — ४र

पक्षान्तरानयन से   ६० — ५० = ६र — ४र

योग करने से   १० = ५र

५ का भाग देने से   २ = र वा र = २

और पहले समीकरण में य = १० — ३र/२ इसमें र का मान २ रखने से   य = १० — ६/२ = १० — ३ = ७

इसलिये २य + ३र = २० और ३य + २र = २५ इन दोनों समीकरण में य = ७ और र = २ इन मानों को दोनों समीकरण में य और र राशियों के स्थान में रखने से उनकी समता बनी रहैगी जैसे पहले समीकरण में
२×७ + ३×२ = २० और दूसरे समीकरण में
३×७ + २×२ = २५

जो दो समीकरण में अव्यक्त राशियों के एक से मान हों तो उनको समोन्नमितिवर्ण समीकरण कहेंगे और दोनों समीकरण को नीचे ऊपर लिख कर उनके दाहिनी ओर } ऐसा कोष्ट कर देते हैं और जो दो समीकरण से एक ऐसा समीकरण बनाते हैं कि उस में केवल एक अव्यक्त राशि रह जाती है तो जिस क्रिया से दूसरी अव्यक्त राशि मिट जाती है उसे एकवर्णशोधन कहते हैं और जैसे पूर्व दो समीकरणों में एक वर्ण शोधन से य और र दोनों अव्यक्तराशियों के मान निकल आये हैं वैसे ही सरूप के जो कोई और दो समीकरण हों और उनमें प्रत्येक समीकरण की समता अव्यक्त राशियों के एक से मान रखने से बनी रहै तो एक वर्ण-

शोधन से दोनों अव्यक्त राशियों का मान निकल आवेगा परन्तु एक वर्ण शोधन की सुगम रीति बतलाते हैं। जैसे

॥ उदाहरण ॥

(१) २य + ३र = ३० } इष्ट समीकरण हैं
और २य − ३र = ८ }

दो तुल्य राशियों का योग करने से

४य = ३८ ∴ ४ का भाग देने से य = $\frac{३८}{४}$ = ७

ऐसे ही तुल्य राशियों का अन्तर करने से

६र = १२ ∴ ६ का भाग देने से र = $\frac{१२}{६}$ = २

(२) २य + र = १६ } इष्ट समीकरण हैं इनमें य
३य + २र = २५ } और र राशियों का मान बताओ

पहले समीकरण के प्रत्येक पद को २ से गुणा तो

४य + २र = ३२ इसके नीचे दूसरे समीकरण को लिखा ३य + २र = २५

अन्तर करने से य = ७ और पहले समीकरण में पक्षांतरनयन से र = १६ − २य

= १६ − २ × ७

= १६ − १४

= २

(३) २य + ३र = ३० } समीकरण हैं इनमें य और
३य + २र = २५ } र राशियों का मान बताओ

पहले समीकरण के प्रत्येक पद को ३ से गुणा करो तो

४य + ६र = ५० दूसरे समीकरण के प्रत्येक पद को ३ से गुणा करो तो ९य + ६र = ७५ इस समीकरण में से ऊपर के समीकरण को घटाया तो ५य = २५

इसलिये ५ का भाग देने से $य = \frac{३५}{५} = ७$

और दूसरे समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$२ र = २५ - ३ य = २५ - ३ \times ७ = २५ - २१ = ४$

इसलिये २ का भाग देने से $र = \frac{४}{२} = २$

जिस रूप के ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं वैसेही रूप के और जो दो भिन्न समीकरण हों वा ऐसे दो समीकरण हों कि जो उनपर पूर्व रीतियों से क्रिया करें तो उन के रूप ऊपर के उदाहरणों के समीकरणोंके रूप के सम होजांय तो जिन रीतियों से पूर्व उदाहरण के समीकरणों में य और र अव्यक्त राशियों का मान मिलगया है उन्हीं रीतों से इष्ट दो समीकरण में अव्यक्त राशि का मान निकल आवेगा उन रीतियों का यही आशय है कि इष्ट दो समीकरण से एक ऐसा समीकरण बनाना चाहिये जिसमे केवल एक राशि अव्यक्त रह जाय और दूसरी अव्यक्त राशि मिट जाय इसके लिये रीति लिखते हैं ॥

॥ रीति ॥

देखो कि दोनों समीकरण में किस अव्यक्त राशि के गुण छोटे हैं और जो य राशि के गुण छोटे हों तो य राशि का गुण जो एक समीकरण में हो उस से दूसरे समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो और ऐसेही जो य राशि का गुण दूसरे समीकरण में हो उससे पहले समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो फिर देखो कि इस क्रिया करने से जो दो नये समीकरण उत्पन्न हों उन का योग वा अन्तर करने से य राशि मिट जायगी और

एक ऐसा समीकरण रह जायगा कि उसमें केवल र अ
व्यक्त राशि रहेगी और जो र राशि के गुण छोटे हों तो पू
र्व क्रिया से र राशि का शोधन करो और जिस अव्यक्त राशि
के गुण छोटे होते हैं उनसे दोनों समीकरण को पृथक् २
गुणाते हैं इसका यह कारण है कि इस रीति से थोड़ा गुणाक
रना पड़ता है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $२य+१६र=४८$ और $५य-१३र=६७$ } तो य और र का मान ब०

पहले समीकरण प्रत्येक पद को ५ से गुणा करो और दू
सरे समीकरण प्रत्येक पद को २ से गुणा करो तो

$$१०य+८०र=२४०$$

और $१०य-२६र=१३४$

अन्तर करनेसे $१०६र=१०६$

$\therefore र=१$

और पहले समीकरण में पक्षांतरानयन से

$२य=४८-१६य=४८-१६\times१=४८-१६=३२$

२ का भाग देने से $य=१६$

य और र अव्यक्त राशियों के मानों की सत्यता देखने के
लिये उन्हें पूर्व समी करणोंमें रक्खा तो

$२य+१६र=२\times१६+१६\times१=३२+१६=४८$

और $५य-१३र=५\times१६-१३\times१=८०-१३=६७$

(२) $७य-८र=३$ और $१३य+५र=८५$ } तो य और र का मान बताओ

इन समीकरणों में र राशि के गुण छोटे हैं इसलिये प

हले समी करण को दूसरे समी करण की र राशि के गुण ५ से गुना और दूसरे समी करण को पहले समी करण की र राशि के गुण ८ से गुना तो

$$३५य - ४०र = १५$$

$$\text{और} \quad १०४य + ४०र = ६८०$$

योग करने से $१३९य = ६९५$

१३९ का भाग देने से $य = \frac{६९५}{१३९} = ५$

और पहले समी करण में $८र = ७य - ३$

पक्षान्तरानयन से $= ७ \times ५ - ३$

$$= ३५ - ३$$

$$= ३२$$

इसलिये ८ का भाग देने से $र = \frac{३२}{८} = ४$

य और र अव्यक्त राशियों के मान जो निकले हैं उनकी सत्यता देखने के लिये परीक्षा करते हैं ॥

$$७य - ८र = ७ \times ५ - ८ \times ४ = ३५ - ३२ = ३$$

$$\text{और} \quad १३य + ५र = १३ \times ५ + ५ \times ४ = ६५ + २० = ८५$$

जो समीकरणों में अव्यक्त राशियों के गुण बड़े अंक हों तो अव्यक्त राशियों के मान सुगम रीति से निकालना बन जाते हैं ॥ जैसे

॥ उदाहरण ॥

(२) $१६य + २३र = ९७$ } तो य और र का मा
और $१४य - १२र = २८$ } न बताओ

१६ और १४ का ११२ लघु समापवर्त्य है और इसमें १६ पूरा ७ बार जाता है और १४ पूरा ८ बार जाता है तो पहले समी करण को ७ से गुणो और दूसरे समीकरण को ८ से गुणो

इसलिये ११२य + १६१र = ६५८
११२य − ९६र = १४४

अन्तर करने से २५७र = ५१४

२५७ का भाग देने से र = ५१४/२५७ = २

और दूसरे समीकरण में पक्षांतरानयन से

१४य = १२र + १८ = १२×२ + १८ = २४ + १८ = ४२

१४ का भाग देने से य = ४२/१४ = ३

(२) ५४य − १२१र = १५ }
और ३६य − ७७र = २१ } य और र का मान बताओ

५४ और ३६ का २१६ लघु समापवर्त्य है और इसमें ५४ का पूरा ४ वार भाग लगता है और ३६ का पूरा ६ वार भाग लगता है इस लिये पहले समीकरण को ४ से गुणा किया और दूसरे समीकरण को ६ से गुणा किया तो

२१६य − ४८४र = ६० }
२१६य − ४६२र = १२६ }

अन्तर करने से २२र = ६६

२२ का भाग देने से र = ६६/२२ = ३

और दूसरे समीकरण में पक्षांतरानयन से

३६य = २१ + ७७र = २१ + ७७×३ = २१ + २३१ = २५२

३६ का भाग देने से य = २५२/३६ = ७

॥ प्रश्न १ ॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें य और र का मान बताओ

(१) य + र = १७ }
२य − र = १९ }

(२) ४य − ७र = २६ }
४य + ५र = ५० }

(३) ५य + र = ३२ ; ३य − २र = १५ } (४) ३य − ७र = २ ; ११र − ३य = २ }

(५) ३य + ४र = ११ ; १५य − २र = ११ } (६) १३य − ६र = ३१ ; ११य − ३र = ४७ }

(७) ७य − ६र = १० ; ६य − ७र = ३ } (८) २५य + २र = ७६ ; १२र − य = २४ }

(९) ५य + २र = १६ ; ९र + २य = ३१ } (१०) ११य − ७र = ७२ ; ७य − ११र = ० }

(११) ३६य − ४५र = ० ; २य + ५र = १ १/२ } (१२) ९य + ५र = ६५ ; ७य − २ १/२ र = २५ }

(१३) १५य − र = २४३ ; ३५र + य = २५५ } (१४) ११य − १३र = १६ ; २०य − १९र = ४३ }

(१५) ४५य + ८र = ३५० ; २१र − १३य = १३२ } (१६) १०१य − ३४र = ६७ ; १०३य + २८र = २९ }

(१७) ६४य + ९०र = २३७ ; ६३य − २१८र = ८० } (१८) ३ १/२ य − ४ १/२ र = १२ ; ७य + ९र = ६० }

(१९) २ १/५ य + ३ १/३ र = ४८ ; ४ १/२ य + १० र = ११६ } (२०) ४ १/३ य − ३ १/२ र = ६ ; १/२ य − १/४ र = २ }

५६ प्र० जिन समीकरणों में अव्यक्त राशि का मान निकालना हो तो जो रूप कि पूर्व उदाहरणों में समीकरणों का लिखा है उसके समान रूप इष्ट समीकरणों का करलो । जैसे

॥ उदाहरण ॥

(१) २(य+र) = ३(य−र) + १०
और २य − र = ४(२र − य) + ३ } य और र का मान बता०

पहले समीकरण में गुणा करने के पीछे कोष्ठ दूर करने से

२य + २र = ३य − ३र + १०

पक्षान्तरानयन से ५र − य = १० यह पहले समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

दूसरे समीकरण में कोष्ठ दूर करने से

२य − र = ८र − ४य + ३

पक्षांतरानयनसे ६य − ९र = ३

३ का भाग देनेसे २य − ३र = १ यह दूसरे समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

इसलिये दोनों लघुतम रूप समीकरणों को लिखा तो

$$\left.\begin{array}{r} ५र - य = १० \\ \text{और}\quad २य - ३र = १ \end{array}\right\}$$

इन में पहले समीकरण को २ से गुणा करो तो

१०र − २य = २०

और दूसरे समीकरण को रक्खा २य − ३र = १

योग करने से ७र = २१

७ का भाग देनेसे $र = \frac{२१}{७} = ३$

और पहले लघुतम रूप समीकरण में पक्षान्तरानयनसे

य = ५र − १० = ५ × ३ − १० = १५ − १० = ५

$$\left.\begin{array}{l} (१)\quad \frac{२य - र}{३} + ६ = \frac{३र - य}{२} + \frac{९}{२} \\ \text{और}\quad \frac{३य + र}{५} + १ = \frac{३र + य + १३}{१०} \end{array}\right\}$$ य और र का मान बताओ

छेदगम के अर्थ पहले समीकरण को ६ से गुणा करो

तो ४य − २र + ३६ = ९र − ३य + २७

पक्षांतरानयन से ४य + ३य − २र − ९र = २७ − ३६

योग करने से $७य-८र=-९$ यह पहले समीकरणका लघुतम रूप हुआ ॥

छेद गम के अर्थ दूसरे समीकरण को १० से गुणा करो तो

$$६य+२र+१०=३र+य+१३$$

पक्षान्तरानयन और योग करने से $५य-र=३$ यह दूसरे समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

दोनों लघुतम रूप समीकरणों को एक स्थान में इकट्ठा रक्खा

$$\left.\begin{array}{r} ७य-८र=-९ \\ \text{और } ५य-र=३ \end{array}\right\}$$

इन में पिछले समीकरण को ८ से गुणा तो

$$४०य-८र=२४$$

और पहले समीकरण को रक्खा

$$७य-८र=-९$$

अन्तर करने से $३३य=३३$

३३ का भाग देने से $य=\frac{३३}{३३}=१$

और दूसरे समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$र=५य-३=५\times१-३=५-३=२$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{३य-५र}{२}+३=\frac{२य+र}{५} \\ \text{और } ८-\frac{य-२र}{४}=\frac{य}{२}+\frac{र}{३} \end{array}\right\}$$ य और र का मान बताओ

छेद गम के लिये पहले समीकरण को १० से गुणा किया तो

$$१५य-२५र+३०=४य+२र$$

पक्षान्तरानयन और योग करने से

११य − २७र = − ३० प्रथम लघुतम रूप समीकरण हुआ छेदगम के लिये दूसरे समीकरण को १२ से गुणा किया तो ९६ − ३ + ६र = ६ + ४र पक्षान्तरानयन और योग करने से ९६ = ९य − २र दूसरा लघुतम रूप समीकरण हुआ ॥

प्रथम लघुतम रूप समीकरण को ९ से गुणा किया तो

$$९९य - २४३र = - २७०$$

दूसरे लघुतम रूप समीकरण को ११ से गुणा किया तो

$$९९य - २२र = १०५६$$

अन्तर करने से $२२१र = १३२६$

२२१ का भाग देने से $र = \frac{१३२६}{२२१} = ६$

दूसरे लघुतम रूप समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$९य = ९६ + २र = ९६ + २ \times ६ = ९६ + १२ = १०८$$

९ का भाग देने से $य = \frac{१०८}{९} = १२$

॥ १ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें य और र अव्यक्त राशियों का मान निकालो

(१) $\left.\begin{array}{l} ३(४य - ५र) = २(य + र) + ३ \\ ४(३य - २र) = ५(य - र) + ११ \end{array}\right\}$

(२) $\left.\begin{array}{l} ३य + \frac{र}{३} = ३६ \\ \frac{६र - २य}{४} = ८ \end{array}\right\}$

(३)
$$\frac{३य - २र}{२} - ३ = \frac{२य - र}{४}$$
$$\frac{५य - ४र}{२} - ३ = \frac{४य - ३र}{३}$$

(४)
$$\frac{२य - ३}{२} + र = ७$$
$$५य - १३र = ३३\frac{१}{२}$$

(५)
$$\frac{य + ३}{र} = \frac{१}{३}$$
$$\frac{य}{र - १} = \frac{१}{५}$$

(६)
$$\frac{य}{८} + \frac{र}{६} = ४२$$
$$\frac{य}{६} + \frac{र}{८} = ४३$$

(७)
$$\frac{य}{६} + \frac{र}{११} = २६$$
$$\frac{य}{२} - \frac{र}{७} = ४६$$

(८)
$$\frac{१}{२}(य + र) = \frac{१}{३}(२य + ४)$$
$$\frac{२}{३}(य - र) = \frac{१}{२}(य - २४)$$

(९)
$$\frac{१}{७}(य+२)+\frac{१}{४}(र-य)=२य-८$$
$$\frac{१}{३}(२र-३य)+\frac{१}{५}(८य+६र-७)\;३य+४$$

(१०)
$$\frac{१}{३}(३य-७र)=\frac{१}{५}(२य+र+१)$$
$$८-\frac{१}{५}(य-९)=६$$

(११)
$$\frac{य-२}{५}-\frac{१०-य}{३}=\frac{र-१०}{४}$$
$$\frac{२र+४}{३}-\frac{२य+र}{८}=\frac{य+१३}{४}$$

(१२)
$$\frac{३य+र}{५}+\frac{७र+६य+११}{१८}=३\frac{१}{२}-\frac{५य-१७}{६}$$
$$\frac{३}{७}(५य+३र+२)=\frac{३}{२}-(६र+६)$$

॥ दो वर्णात्मक घातसमीकरण सम्बन्धी प्रश्न ॥

(१) दो संख्याओं का योग २६ है और जो बड़ी संख्या के आधे में छोटी संख्या का तृतीयांश जोड़ा जाय तो योग ११ के तुल्य होता है तो बतलाओ कि वे कौनसी २ संख्या हैं ॥

कल्पना करो कि य और र इष्ट राशि हैं तो प्रश्न के अनुसार $य+र=२६$ और कल्पना करो य राशि बड़ी है तो इसका आधा $\frac{य}{२}$ हुआ और दूसरी राशि का तृतीयांश $\frac{र}{३}$ हुआ इस लिये प्रश्न के

अनुसार $\frac{य}{२} + \frac{र}{३} = ११$

$$\left.\begin{array}{l} य + र = २६ \\ \frac{य}{२} + \frac{र}{३} = ११ \end{array}\right\}$$ तो

इन दो समीकरणों से य और र अव्यक्त राशियों का मान निकालने से प्रश्न का उत्तर निकल आवेगा ॥

दूसरे समीकरण को ६से गुणा करो तो ३य + २र = ६६
पहले समीकरण को २से गुणा करो तो २य + २र = ५२

अंतर करने से य = १४

और पहले समीकरण में पक्षान्तरानयन से र = २६ − य = २६ − १४ = १२ इस लिये १४ और १२ इष्ट संख्या हुई

इन की सत्यता दिखाते हैं $१४ + १२ = २६$

$$\frac{१४}{२} + \frac{१२}{३} = ७ + ४ = ११$$

इस प्रश्न के उत्तर निकालने में य और र दो अव्यक्त राशियों से दो समीकरण बनाने की कुछ आवश्यकता नहीं है केवल एक वर्ण समीकरण के उपकरण से प्रश्न का उत्तर निकल आवेगा ॥

कल्पना करो कि इष्ट संख्याओं में य संख्या बड़ी है तो प्रश्न के अनुसार २६ — य दूसरी संख्या होगी और $\frac{य}{२}$ बड़ी राशि का आधा हुआ और $\frac{२६-य}{३}$ यह छोटी राशि का तृतीयांश हुआ इसलिये प्रश्न के अनुसार $\frac{य}{२} + \frac{२६-य}{३} = ११$ यह एक वाल एक वर्ण समीकरण है ॥

६ से गुणा किया तो ३य + ४२ − २य = ६६

पक्षान्तरानयन और योग करने से य = २४ यह १ संख्या हुई

और ४६ — २४ = २२ यह दूसरी संख्या हुई

(२) मेरे पास आने और पाइयां मिलकर १॥-) के समान हैं और जो मेरे पास जितने आने हैं उतनी पाइयां होतीं और जितनी मेरे पास पाइयां हैं उतने आने होते तो मेरे पास आने और पाइयां मिलकर ॥।=) के समान होते तो बतलाओ कि मेरे पास कितने आने हैं और कितनी पाइयां ॥

कल्पना करो कि य आनों की संख्या है

और र पाइयों की संख्या है

तो य आने = १२य पाइयां

और १॥-) = ३०० पाइयां

इस लिये प्रश्न के अनुसार १२य + र = ३०० प्रथम समीकरण

र आने = १२र पाइयां

॥।=) = २६८ पाइयां

इस लिये प्रश्न के अनुसार १२र + य = २६८

प्रथम समीकरण को १२ से गुणा किया तो १४४य + १२र = ३६००

इस समीकरण में से इस के ऊपर जो समीकरण लिखा है उसे घटाया तो १४३य = ३४३२

१४३ का भाग देने से य = $\frac{३४३२}{१४३}$

= २४ यह आनों की संख्या हुई

और प्रथम समीकरण में पक्षान्तरानयन

से र = ३०० − १२य = ३०० − १२×२४

= ३०० — २७८ = २२ यह
पाइयों की संख्या हुई॥

अब देखो कि अव्यक्त राशियों का मान ठीक है वा नहीं
क्योंकि २२ पाइयां = १ आना
और २४ आने = १ रुपया और ८ आने
इस लिये सर्व धन = १ रुपया और ९ आने
और २४ पाइयां = २ आने
और २२ आने = २२ आने
इस लिये दोनों मिलकर = २४ आने

(३) ७ वर्ष आगे पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से ४ गुनी थी परंतु ७ वर्ष उपरान्त पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से दूनी रह जायगी तो बतलाओ कि हाल में हर एक मनुष्य की क्या अवस्था है॥

कल्पना करो कि य लड़के की अवस्था है॥
और र बाप की अवस्था है
तो य−७ = लड़के की अवस्था ७ वर्ष पहले
र−७ = बाप की अवस्था ७ वर्ष पहले
य+७ = लड़के की अवस्था ७ वर्ष पीछे
र+ ७ = बाप की अवस्था ७ वर्ष पीछे

प्रश्न के अनुसार र−७ = ४(य−७)
और र+७ = २(य+७) } इन समीकरणों से य और र का मान निकालो

कोष्ठ को दूर करने से र−७ = ४य−२८
और र+७ = २य+१४
अन्तर करने से −१४ = २य−४२
पक्षान्तरानयन से २य = ४२−१४ = २८

२ का भाग देने से य = $\frac{२८}{२}$ = १४ यह लड़के की अवस्था है और पहले समीकरण में पक्षान्तरनयन से
र = ७ + ४ (य − ७) = ७ + ४ (१४ − ७) = ७ + ४ × ७ =
७ + २८ = ३५ इस लिये ३५ वर्ष की अवस्था बाप की हुई

(४) मेरे पास दुपट्टे में रुपये और चौअन्नियां बंधी हैं और जितने मेरे पास रुपये हैं उन से जो दूने मेरे पास रुपये होते और जितनी चौअन्नियां हैं उन से आधी चौअन्नियां होतीं तो मेरे पास २४ $\frac{३}{४}$ रुपये सर्व धन होता परंतु जितने मेरे पास रुपये हैं उन से आधे रुपये होते और जितनी चौअन्नियां हैं उन से दो गुनी चौअन्नियां होतीं तो मेरे पास ७ सर्व धन होता तो बतलाओ कि मेरे पास कितने रुपये हैं और कितनी चौअन्नियां॥

कल्पना करो कि मेरे पास य रुपये हैं
और र चौअन्नियां हैं

तो २य रुपये = ४ × २य चौअन्नियां
= ८य चौअन्नियां

और $\frac{र}{२}$ चौअन्नियां = $\frac{र}{२}$ चौअन्नियां

और २४ $\frac{३}{४}$ रुपये = ४ × २४ $\frac{३}{४}$ चौअन्नियां
= ९९ चौअन्नियां

इस लिये प्रश्न के अनुसार ८य + $\frac{र}{२}$ = ९९

२ से गुणन करने से १६य + र = १९८ प्रथम समीकरण

$\frac{य}{२}$ रुपये = ४ × $\frac{य}{२}$ चौअन्नियां = २य चौअन्नियां

और २र चौअन्नियां = २र चौअन्नियां

और ७ रुपये = ४ × ७ वा २८ चौअन्नियां

इस प्रश्न के अनुसार २य + २र = २८॥

२ का भाग देने से य + र = १४ दूसरा समीकरण

और प्रथम समीकरण में १६ य + र = १९४

अन्तर करने से　　　१५ य　　= १८०

१५ का भाग देने से य = $\frac{१८०}{१५}$　　= १२ यह रुपयों की संख्या हुई

और दूसरे समीकरण में पक्षान्तरानयन से

र = १४ − य = १४ − १२ = २ यह चौअन्नियों की संख्या हुई ॥

(५) एक कुंजड़न ने सन्तरे मोल लिये और उन के जब दाम चुकाये तो उसने बराबर रुपये और बराबर आने दिये और जितने रुपये और जितने आने दिये उन दोनों संख्याओं के योग के समान कोड़ी सन्तरे ख़रीदे तो बतलाओ कि एक कोड़ी सन्तरों के क्या दाम हुए ॥

कल्पना करो कि उस ने १ कोड़ी सन्तरे मोल लिये तो प्रश्न के अनुसार कोड़ी की संख्या १ के दो तुल्य खंड वा $\frac{१}{२}$ और $\frac{१}{२}$ रुपये और आनों की संख्या होगी. क्यों कि $\frac{१}{२}$ + $\frac{१}{२}$ = १ और $\frac{१}{२}$ रुपया = ८ आने और $\frac{१}{२}$ आना = ६ पाई इस कारण १ कोड़ी सन्तरों के दाम ८$\frac{१}{२}$ आने वा ८ आने और ६ पाई हुई ॥

॥ दूसरी रीति से ॥

कल्पना करो कि १ कोड़ी के दाम य आने हैं और सन्तरों के दाम में उसने जितने रुपये दिये उन की संख्या र है और जितने आने दिये उन की भी संख्या र है तो प्रश्न के अनुसार उसने २र कोड़ी सन्तरे ख़रीदे होंगे और १ कोड़ी सन्तरों के दाम य आने माने हैं इस लिये २र कोड़ी सन्तरों के दाम अथवा २यर आने होंगे परंतु प्रश्न के अनुसार सब सन्तरों का मोल र रुपये और र आने हैं और र रुपये = १६ र आने इस लिये र रुपये + र आने = १६ र आने + र आने = १७ र आने।

परंतु सन्तरों का एक ही मोल होगा इस कारण

$२यर = १७र$

$२र$ का भाग देने से $य = \frac{१७र}{२र} = \frac{१७}{२} = ८\frac{१}{२}$ आने $= ८$ आने और ६ पाई॥

यह १ कोड़ी सन्तरों के दाम हुए॥

इस उदाहरण से यह ज्ञात पड़ा कि ऐसे प्रश्नों में दो अव्यक्त राशि कल्पना करने से एक अव्यक्त राशि का मान सहज में निकल आवेगा और ऊपर के उदाहरण में केवल एक ही समीकरण बना और दूसरी अव्यक्त राशि भाग देने से समीकरण में से निकल गई॥

॥ तीसरी रीति ॥

कल्पना करो कि एक कोड़ी सन्तरों के य आने दाम हैं तो र य रुपये और यही आने सब सन्तरों के दाम हैं वा सन्तरों के दाम = य रुपये + य आने ॥

$= १६य$ आने $+ य$ आने।

$= १७य$ आने।

और प्रश्न के अनुसार य वा रुपये सन्तरों की कोड़ियों की संख्या हुई॥

॥ त्रैराशिक से ॥

य कोड़ी सन्तरे : १७य आने :: १ कोड़ी सन्तरे : $\frac{१७य}{य}$ और $\frac{१७य}{२य} = \frac{१७}{२} = ८\frac{१}{२}$ आने यह एक कोड़ी सन्तरों के दाम हुए॥

(६) एक ऐसा भिन्न है कि जो उस के अंश में १ जोड़ दो तो भिन्न का मान १ होगा और जो हर में २ जोड़ दो तो भिन्न $\frac{१}{२}$ के तुल्य होगा तो बतलाओ कि वह कौन सा भिन्न है कल्पना करो कि $\frac{य}{र}$ इष्ट भिन्न है इस के अंश में १ जोड़ दिया तो $\frac{य+१}{र}$

यह भिन्न का रूप होगया॥

और प्रश्न के अनुसार $\frac{य+१}{र}=१$॥

र से गुणा करने से $य+१=र$ प्रथम समीकरण। $\frac{य}{र}$ भिन्न के हर में २ जोड़ा तो $\frac{य}{र+२}$ यह भिन्न का रूप होगया। प्रश्न के अनुसार $\frac{य}{र+२}=\frac{१}{२}$॥

२ (र+२) से गुणा किया तो $२य=र+२$ दूसरा समीकरण परंतु प्रथम समीकरण में $र=य+१$ इस लिये र के इस मान को दूसरे समीकरण में स्थापन किया॥

तो $२य=य+१+२=य+३$ शोधन करने से

$य=३$ और $र=य+१=३+१=४$

इस लिये $\frac{य}{र}=\frac{३}{४}$ यह इष्ट भिन्न हुआ।

(७) दो अंकों की एक ऐसी संख्या है कि वह दोनों अंकों के योग से ४ गुनी है और जो उन दोनों अंकों की स्थान बदलकर रक्खो तो यह जो संख्या बनेगी वह पूर्व दूनी संख्या से १२ के समान छोटी होगी तो बतलाओ कि पहली कौन सी संख्या है॥

कल्पना करो कि इष्ट संख्या का य दस स्थानीय अंक है और र एक स्थानीय अंक है

तो जैसे $२३=१०\times२+३$ वैसे ही $१०य+र$ इष्ट संख्या है। इस लिये प्रश्न के अनुसार $१०य+र=४(य+र)$

$=४य+४र$

पक्षान्तर नयन से $१०य-४य=४र-र$

योग करने से $६य=३र$

३ का भाग देने से $२य=र$ प्रथम समीकरण।

और जो अंकों को बदल कर रक्खेंगे तो $१०र+य$ यह दूसरी संख्या हुई।

प्रश्न के अनुसार $१०र+य=२(१०य+र)-१२$
$=२०य+२र-१२$

पक्षान्तरानयन और योग करने से $१९य-८र=१२$

प्रथम समीकरण में $र=२य \therefore -८र=-१६य$

इस मान को ऊपर के समीकरण में रक्खा तो

$$१९य-१६य=१२$$

योग करने से $३य=१२$

३ का भाग देने से $य=\frac{१२}{३}=४$ और $र=२य=२\times४=८$ इस लिये ४८ इष्ट संख्या हुई॥

(८) शाहजहांपुर में एक बज़ाज़ने १० रुपये की रुई लेकर उसे बहुत अच्छी धुनकवा के बहुत महीन कतवाई और आधे सूत की तो बड़े मोल के बिल्ले लगवा कर सुगड़ पगड़ियां बुनवाई और आधे सूत की बारीक मलमल बुनवा इस सब माल को अंकवाया तो ५४ रुपयें का ठहरा और दूसरे बज़ाज़ने भी १० ही रुपयों की रुई मोल लेकर अच्छा सूत कतवा कर तिहाई के सूत की तो मलमल बुनवाई और दो तिहाई सूत की कीमती पगड़ियां, तो इसने जब अपना माल अंकवाया तो पहले बज़ाज़ के माल के दामों से ३० रुपये बढ़ती का ठहरा तो अब बतलाओ कि एक रुपये की रुई जो पगड़ियों में लगी होगी सब लागत और नफ़ा मिल कर उस के अब कितने दाम हो गये॥

और १ रुपये की रुई जो मलमल बुनाने में लगी होगी उसके कितने दाम हो गये॥

कल्पना करो कि १ रुपये की रुई जो पगड़ियों में लगी हो उसमें सब लागत और नफ़ा गिन कर उसके दाम

य रुपये हो गये और १ रुपये की रुई जो मलमल में लगी हो उस में सब लागत और नफ़ा गिनकर उस के दाम र रुपये हो गये॥

तो प्रश्न के अनुसार पहले बज़ाज़ ने जो ५) की रुई की तो पगड़ियां बुनवाईं और ५) की रुई की मलमल और सब मिलाकर ४४४) का अंका॥ वा

५ य + ५ र = ४४४ प्रथम समीकरण और

दूसरे बज़ाज़ने १०) की रुई की तिहाई वा $\frac{१०}{३}$ रुपये की रुई की मलमल बुनवाई और १०) की रुई की दो तिहाई वा $\frac{२०}{३}$ रुपये की रुई की पगड़ियां बुनवाईं॥

इस लिये प्रश्न के अनुसार

$$\frac{२०}{३} य + \frac{१०}{३} र = ४४४ + ३०$$

३ का गुणा करने से २०य + १०र = १४२२ दूसरा समीकरण

प्रथम समीकरण को २ से गुणा तो १०य + १०र = ८८८

इस दूसरे समीकरण में से घटाया तो १०य = ५३४

१० का भाग देने से य = ५३ $\frac{२}{५}$ = ५३।=) ४ $\frac{५}{५}$ पाई॥

पहले समीकरण में पक्षान्तरानयन से

५र = ४४४ − ५य = ४४४ − ५×५३ $\frac{२}{५}$ = ४४४ − २६७ = १७७

५ का भाग देने से र = $\frac{१७७}{५}$ = ३५ $\frac{२}{५}$ = ३५।=) ४ $\frac{५}{५}$ पाई॥

॥ अब इन मानों की सत्यता दिखाते हैं॥

५र + ५य = ५×३५ $\frac{२}{५}$ + ५×५३ $\frac{२}{५}$ = १७७ + २६७ = ४४४ रुपये॥

॥ ३ अभ्यास के लिये प्रश्न॥

(१) गुलाब ने शिवदीन से कहा कि जो तुम मुझे

अपनी १० गोलियां दे दो तो मेरे पास तुमसे दो गुनी गोलियां हो जांय और शिवदीन ने गुलाब से कहा कि जो तुम मुझे अपनी १० गोलियां दे दो तो मेरे पास तुम से तीन गुनी गोलियां हो जांय तो बतलाओ कि हर एक मनुष्य के पास कितनी २ गोलियां हैं ॥

(२) एक मनुष्य के पास दो बटुओं में रुपये हैं और जब उसने १० रुपयों में से ५) एक बटुवे में रख दिये और ५) दूसरे बटुवे में रक्खे तो पहले बटुवे के रुपये दूसरे बटुवे के रुपयों से दूने होगये परंतु जो वह दसों रुपये पहले बटुवे में रख देता तो उस में के रुपये दूसरे बटुवे के रुपयों से तीन गुने हो जाते तो बतलाओ कि हर एक बटुवे में कितने रुपये होंगे ॥

(३) ११ मनुष्यों में ६ पुरुष और ५ स्त्री हों इस परिमाण से एक मंडली में पुरुष और स्त्रियां हैं परंतु उन में से २ पुरुष जाते रहे और दो स्त्रियां और आगईं तो बतलाओ कि पुरुष और स्त्रियां बराबर हो गईं अब उस मंडली में कितने पुरुष और कितनी स्त्रियां थीं ॥

(४) एक दयावान मनुष्य ने ६।।=) को कंगले पुरुष और विधवाओं में बांटने का विचार किया और जब उसने हिसाब लगाया तो मालूम हुआ कि जो वह हर एक पुरुष और विधवा को तीन २ आने दे तो उस के पास सब पुन्यार्थ रुपये और आनों में से १ आना बच रहेगा और जो वह हर एक पुरुष को =) २ पाई दे और हर एक विधवा को ≡) ६ पाई दे तो उस के पास बांट के ६ पाई बच रहेंगी तो बतलाओ कि कितने कंगले पुरुष थे और

कितनी बिधवा थीं ॥

(५) एक ऐसा भिन्न है कि जो उसके अंश और हर दोनों में से २ घटावें तो भिन्न का मान $\frac{१}{२}$ हो जायगा और जो अंश में से २ घटावें और हर में २ जोड़ दें तो भिन्न का मान $\frac{१}{२}$ हो जायगा तो बतलाओ कि कौन सा भिन्न है

(६) ऐसा कौनसा भिन्न है कि उस के अंश और हर का दूना योग उनके तिगुने अन्तर के तुल्य हो ॥

(७) ऐसी दो संख्या कौनसी हैं कि उन में एक संख्या जितनी २० से अधिक है उतनी ही दूसरी संख्या २० से छोटी है और उन दोनों संख्याओं का दशांश योग उन के चतुर्थांश अन्तर की तुल्य है तो बतलाओ कि वे संख्या कौन सी हैं ॥

(८) ऐसी दो संख्या कौन सी हैं कि जो एक संख्या के आधे में दूसरी संख्या का तिहाई जोड़ें तो योग १२ के तुल्य हो जाय परन्तु जो पहली संख्या की तिहाई में दूसरी संख्या का आधा जोड़ दें तो योग २२ के तुल्य हो जाय ॥

(९) एक मनुष्य के पास दो बर्त्तनों में घी भरा था तो उसने प्रथम पहले बर्त्तन में से दूसरे बर्त्तन में इतना घी उंडेला जितना घी दूसरे बर्त्तन में भरा था फिर इसी तरह उसने दूसरी बेर दूसरे बर्त्तन में से पहले बर्त्तन में इतना घी उंडेला जितना घी कि पहली दफ़ा पहले बर्त्तन में से दूसरे बर्त्तन में घी उंडेले पीछे पहले बर्त्तन में बच रहा था और फिर तीसरी बेर उसने पहले बर्त्तन से दूसरे बर्त्तन में इतना घी उंडेला जितना घी कि दूसरी दफ़ा के दूसरे बर्त्तन में घी रह गया था तो अब दोनों

वर्त्तनों में बराबर आठ २ सेर घी हो गया बतलाओ कि पहले ही पहल दोनों वर्त्तनों में कितना २ घी था ॥

(२०) एक संबत् है कि उस के तीन वर्ष पीछे यूरोप खंड के पोर्तुगाल देश में लिसबन नाम नगर भूचाल से नष्ट हो गया और उस संबत् की संख्या के अंकों में यह संबंध है कि सहस्र के स्थान में तो अंक १ है और शत स्थानीय अंक, दश स्थानीय और एक स्थानीय अंकों के योग के तुल्य है और दश स्थानीय अंक, चारों स्थानों के अंकों के तृतीयांश योग के तुल्य है और एक स्थानीय अंक, सहस्र स्थानीय और शत स्थानीय अंकों के चतुर्थांश योग के तुल्य है तो बतलाओ कि लिसबन नगर किस संबत् में नष्ट हुआ ॥

॥ घात क्रिया और मूल क्रिया ॥

५७ परिभाषा जब एक राशि को उसी राशि से एक बार वा कई बार गुणा करें तो गुणन फल को पूर्व राशि का घात कहते हैं और गुणा करने में जितने बार राशि गुणक रूप अवयव के स्वरूप में आवे उस संख्या को इस घात का घात प्रकाशक कहते हैं॥ जैसे अ × अ वा अ इसे अ का दूसरा घात माना जाता है और गुणा करने में अ दो बार आवेगा, ऐसे ही और जानो ॥

इस लिये गुणा करने में और घात क्रिया में कुछ अन्तर नहीं है और इस कारण जो रीतियां गुणा करने के लिये लिख चुके हैं वे घात क्रिया के लिये भी

अवश्य होंगी और याद रक्खो कि घात क्रिया में गुण्य और गुणक तुल्य होते हैं ॥

॥ घात क्रिया में जो उपयोगी रीति हैं उन्हें लिखते हैं ॥

॥ प्रथम रीति ॥

एक अक्षर की राशि का दूसरा घात वा वर्ग करना हो तो उस के घात प्रकाशक को दूना कर दो। जैसे

अ वा $अ^{१}$ का वर्ग $अ^{२}$ है

$अ^{२}$ का वर्ग $अ^{४}$ है क्योंकि $अ^{२} \times अ^{२} = अ^{२+२} = अ^{४}$

$अ^{३}$ का वर्ग $अ^{६}$ है क्योंकि $अ^{३} \times अ^{३} = अ^{३+३} = अ^{६}$

ऐसे ही और जानो ॥

॥ दूसरी रीति ॥

जो किसी घात वा दो गुणक रूप अवयवों की एक राशि का दूसरा घात वा वर्ग करना हो तो हर एक गुणक रूप अवयव का वर्ग करलो तो इन वर्गों का घात इस राशि के वर्ग के तुल्य होगा ॥

अक का वर्ग $अ^{२}क^{२}$ है क्योंकि अक × अक = अक अक = अ अ क क = $अ^{२}क^{२}$ ॥

$अ^{२}$क इस का वर्ग $अ^{४}क^{२}$ है क्योंकि $अ^{२}क \times अ^{२}क = अ^{२}क\,अ^{२}क = अ^{२}अ^{२}कक = अ^{४}क^{२}$ ॥

$अक^{२}$ इस का वर्ग $अ^{२}क^{४}$ है क्योंकि $अक^{२} \times अक^{२} = अक^{२}\,अक^{२} = अ\,अ\,क^{२}क^{२} = अ^{२}क^{४}$ ॥

॥ ऐसे ही और जानो।

इसी रीति से ३यर का वर्ग = ३यर × ३यर = ३ × ३

+ २४ अक्रम ॥ ‡ ५ अक्रम ॥

य य र र = ९ $\text{य}^2\text{र}^2$ ॥

और २ अ क ग का वर्ग = ४ $\text{अ}^2\text{क}^2\text{ग}^2$ ॥

ऐसे ही जो किसी राशि में और अधिक गुणकरूप अवयव हों तो उन का जुदा २ वर्ग करके इन वर्गों को गुणा करलो ॥

॥ तीसरी रीति ॥

जो भिन्न का वर्ग करना हो तो उस के अंश और हर दोनों का जुदा २ वर्ग करलो ॥ जैसे

$\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ इस का वर्ग $\frac{\text{अ}^2}{\text{क}^2}$ है क्योंकि $\frac{\text{अ}}{\text{क}} \times \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{अ अ}}{\text{क क}}$ * $= \frac{\text{अ}^2}{\text{क}^2}$

$\frac{\text{अ क}}{\text{ग घ}}$ इस का वर्ग $\frac{\text{अ}^2\text{क}^2}{\text{ग}^2\text{घ}^2}$ है क्योंकि $\frac{\text{अ क}}{\text{ग घ}} \times \frac{\text{अ क}}{\text{ग घ}}$ * $= \frac{\text{अ क}}{\text{ग घ}}$ | $\frac{\text{अ क}}{\text{ग घ}} = \frac{\text{अ}^2\text{क}^2}{\text{ग}^2\text{घ}^2}$ ॥

$\frac{\text{२ य}}{\text{३ र}}$ इस का वर्ग $\frac{\text{४ य}^2}{\text{९ र}^2}$ है ऐसे ही जो और कोई भिन्न हो तो उस का वर्ग करलो ॥

॥ चौथी रीति ॥

जो दो पद की राशि हों और दोनों पद धन हों तो उस राशि के वर्ग करने की यह रीति है कि हर एक पद का जुदा २ वर्ग कर के उन वर्गों को जोड़ दो और इस योग में दोनों पदों के दूने घात को मिला दो ॥

॥ कारण यह है ॥

अ + क इस का वर्ग $\text{अ}^2 + \text{क}^2 + \text{२ अ क}$ है * ॥

अर्थात् अ का वर्ग + क का वर्ग + अ और क का दूना घात के तुल्य है ॥

* ४० प्रक्रम + ४ प्रक्रम * २२ प्रक्रम का चौथा उदाहरण

॥ पांचवीं रीति ॥

जो दो पद की राशि में एक पद ऋण हो और उस राशि का वर्ग करना हो तो हर एक पद का जुदा २ वर्ग करके उन के योग में से दोनों पदों की दूनी घात को घटा दो कारण यह है $\overline{\text{अ} - \text{क}}$ इस का वर्ग $\text{अ}^2 + \text{क}^2 - २\text{अक}$ है अर्थात अ का वर्ग + क का वर्ग − अ और क का दूना घात के तुल्य है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $(१+\text{य})^2 = १^2 + \text{य}^2 + २ \times १ \times \text{य} = १ + \text{य}^2 + २\text{य}$ ॥

(२) $(१-\text{य})^2 = १^2 + \text{य}^2 - २ \times १ \times \text{य} = १ + \text{य}^2 - २\text{य}$ ॥

(३) $(२+\text{य})^2 = २^2 + \text{य}^2 + २ \times २ \times \text{य} = ४ + \text{य}^2 + ४\text{य}$ ॥

(४) $(२\text{य}-१)^2 = (२\text{य})^2 + १^2 - २ \times २\text{य} \times १ = ४\text{य}^2 + १^2 - ४\text{य}$ ॥

(५) $(२\text{अ}+३\text{क})^2 = (२\text{अ})^2 + (३\text{क})^2 + २ \times २\text{अ} \times ३\text{क} = ४\text{अ}^2 + ९\text{क}^2 + १२$ ॥

(६) $(\text{अक}-१)^2 = (\text{अक})^2 + १^2 - २ \times \text{अक} \times १ = \text{अ}^2\text{क}^2 + १ - २\text{अक}$ ॥

५८ चौथी और पांचवीं जो रीति लिखी हैं उन से बहुतेरे अंकों के वर्ग बिना लिखे केवल मन में बिचार करने से निकल आते हैं। जैसे २५ का वर्ग निकालना हो तो २५ = २० + ५ इस लिये २५ का वर्ग = $\overline{२० + ५}$ का वर्ग = २० का वर्ग + ५ का वर्ग + २० और ५ का दूना घात = ४०० + २५ + २०० ॥

= ६२५

२५ के वर्ग के निकालने में जो २ क्रिया करनी पड़ी हैं वे सब बिना लिखे मन में केवल बिचार से हो सक्ती हैं

१५ का वर्ग निकालो ॥

१५ का वर्ग = $\overline{१० + ५}^{२}$ का वर्ग

= १० + ५ + २ × ५ × १०

= १०० + २५ + १००

= २२५

इस वर्ग के निकालने की क्रिया से बड़े अंकों का वर्ग सहज में निकल आता है। जैसे ४९९ का वर्ग करो क्योंकि ४९९ = ५०० − १ ॥

इस लिये ४९९ का वर्ग = ५०० − १ का वर्ग

= ५०० का वर्ग + १ का वर्ग − २ × ५०० × १

= २५०००० + १ − १०००

= २४९००० + १

= २४९००१

इस वर्ग को बिना लिखे केवल मन में विचार करने से कर सक्ते हैं॥

५९ ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन से यह स्पष्ट जान पड़ता है कि जो एक पद की राशि का वर्ग करोगे तो वर्ग में भी एक ही पद होगा और जो दो पद की राशि का वर्ग करोगे तो वर्ग में तीन पद होंगे इससे यह बात निकलती है कि दो पद की राशि पूरा वर्ग नहीं हो सक्ती या जो उस का वर्ग मूल ठीक चाहोगे तो न मिलेगा कारण यह है कि जो दो पद की राशि का वर्ग करते हैं तो वर्ग में तीन पद आते हैं और जो केवल एक पद की राशि का वर्ग करते हैं तो उस के वर्ग में भी केवल एक पद होता है इस कारण दो पद की राशि वर्ग करने से नहीं निकल सक्ती है॥

इतना स्मरण रक्खो कि अ × क इस का वर्ग अ × क है

और अ + क इस का वर्ग $अ^२ + क^२$ नहीं परंतु $अ^२ + क^२ + २अक$ है और अ और क अक्षरों के स्थान में चाहो सो संख्या मान लो॥

॥ ४ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

। नीचे जो राशि लिखी हैं उन का वर्ग निकालो।

(१) ५ अय

(२) ५ अयर

(३) −७ अक

(४) अ $क^२$ ग

(५) −७ $अ^४ क^३$ ग

(६) $\frac{अक}{ग}$

(७) $\frac{५ अय}{२ कर}$

(८) $\frac{अ^२ क}{२ ग}$

(९) $\frac{४ अ^२ क}{७ अ ग^३}$

(१०) $\frac{-३ प र^२}{२ य^२}$

(११) $\frac{४}{५ अ^३ क ग^२}$

(१२) अ + २

(१३) अक + २

(१४) य + ३

(१५) २ − र

(१६) २म − न

(१७) २य − ३र

(१८) य − $\frac{प}{२}$

(१९) य + $\frac{३}{२}$

(२०) मय + न

(२१) २सय − न

(२२) अकय + ग

(२३) ३यर − अ

(२४) $\frac{३}{२}$ अक + ग

॥ मूल क्रिया ॥

६० मूल क्रिया ठीक घात क्रिया से उलटी होती है और हम इस क्रिया से वह राशि जिस को मूल संख्या है निकाल लेते हैं कि जिस पर घात क्रिया होने से इष्ट राशि निकली हो जैसे २५ का वर्ग मूल निकालो इस का यह

अर्थ है कि एक ऐसी संख्या निकालो जिस का वर्ग ९ है इस कारण $अ^{२}$ का वर्ग मूल अ है क्योंकि अ ऐसी राशि है कि इस का वर्ग $अ^{२}$ है। और ऐसे ही और जानो॥

॥ पहली रीति ॥

६१ जो एक पद की राशि का वर्ग मूल निकालना हो तो उस के घात प्रकाशक को आधा करलो जैसे $अ^{२}$ इस का वर्ग मूल $अ^{१}$ वा अ है क्योंकि $अ + अ = अ^{२}$ $अ^{४}$ इस का वर्ग मूल $अ^{२}$ है क्योंकि $अ^{२} + अ^{२} = अ^{४}$ ऐसे ही और जानो॥

॥ दूसरी रीति ॥

६२ जो दो गुणक रूप अवयवों के घात का वर्ग मूल निकालना हो तो हर एक गुणक रूप अवयव का वर्ग मूल जुदा २ निकालो और उन मूल राशियों को गुण दो तो यह घात इष्ट घात का वर्ग मूल होगा॥

इस का वर्ग मूल इस के स्थान में √— यह चिन्ह लिखो॥

॥ उदाहरण ॥

$\sqrt{अक} = \sqrt{अ}.\sqrt{क}$ क्योंकि $\sqrt{अ}.\sqrt{क} \times \sqrt{अ}.\sqrt{क} = \sqrt{अ}.\sqrt{अ}.\sqrt{क}.\sqrt{क} = अक$ कारण यह है कि जो वर्ग मूल से गुणा करोगे तो घात वर्ग के तुल्य होगा॥

$\sqrt{अ^{२}क} = \sqrt{अ^{२}}.\sqrt{क}$ क्योंकि $\sqrt{अ^{२}}.\sqrt{क} \times \sqrt{अ^{२}}.\sqrt{क} = \sqrt{अ^{२}}.\sqrt{अ^{२}}.\sqrt{क}.\sqrt{क} = अ^{२}क$॥

ऊपर जो उदाहरण लिखा है उस से यह जान पड़ता है कि $\sqrt{अ}.\sqrt{क}$ इस का वर्ग अक है और इस कारण अक इस का वर्ग मूल $\sqrt{अ}.\sqrt{क}$ यह है॥

इसी रीति से दो गुणक रूप अवयवों के घातों का भी वर्ग मूल निकल सक्ता है॥

ओर ऊपर के उदाहरणों के अनुसार यह भी सिद्ध हो सक्ता है कि जो तीन वा अधिक गुणक रूप अवयवों के घात का वर्ग मूल निकालना हो तो हर एक गुणक रूप अवयवों का वर्ग मूल जुदा २ निकाल लो ओर सब मूल राशियों को गुण दो तो यह घात इष्ट घात का वर्ग मूल होगा। जैसे

$\sqrt{\text{अकग}} = \sqrt{\text{अ}}.\sqrt{\text{क}}.\sqrt{\text{ग}}$ क्योंकि $\sqrt{\text{अ}}.\sqrt{\text{क}}.\sqrt{\text{ग}} \times \sqrt{\text{अ}}.\sqrt{\text{क}}.\sqrt{\text{ग}} = \sqrt{\text{अ}}.\sqrt{\text{अ}}.\sqrt{\text{क}}.\sqrt{\text{क}}.\sqrt{\text{ग}}.\sqrt{\text{ग}} = \text{अकग}$॥

। ऐसे ही ओर जानो।

॥ तीसरी रीति ॥

६३ जिस भिन्न का वर्ग मूल निकालना हो उस के अंश ओर हर दोनों का जुदा २ वर्ग मूल निकाल लो ॥ जैसे

$\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}} = \frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{क}}}$ क्योंकि $\frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{क}}} \times \frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{क}}} = \frac{\sqrt{\text{अ}}\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{क}}\sqrt{\text{क}}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$ इस से यह जान पड़ता है कि $\frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{क}}}$ ऐसी राशि है कि इस का वर्ग $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ है इस कारण $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ इस का वर्ग मूल $\frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{क}}}$ है ॥

॥ उदाहरण ॥

$$\sqrt{\frac{४००}{४९}} = \frac{\sqrt{४००}}{\sqrt{४९}} = \frac{२०}{७} \text{ ओर } \sqrt{\frac{९\text{अ}^२}{४\text{प}^२}} = \frac{\sqrt{९\text{अ}^२}}{\sqrt{४\text{प}^२}} = \frac{३\text{अ}}{२\text{प}}$$

॥ चौथी रीति ॥

६४ जो तीन पद के पूरे वर्ग का वर्ग मूल निकालना हो तो उन पदों को किसी एक अक्षर के घातों के अनुसार क्रम से लिखो अथवा जिस पद में अक्षर का बड़ा घा

न हो उसे पहले लिखो और फिर जिस पद में अक्षर का घात उसके बड़े घात से उतरता हो उसे लिखो तिस पीछे तीसरे पद को लिखो। और भाग देने में भी भाज्य और भाजक के पदों को किसी एक अक्षर के घातों के अनुसार लिखते हैं और पूर्ण वर्ग के तीनों पद धन हों तो आदि और अंत के पदों का जुदा २ वर्ग मूल निकालो तो इन मूल राशियों का योग इस वर्ग का वर्ग मूल होगा। और जो इस पूर्ण वर्ग का मध्य का पद ऋण हो तो आदि और अंत के पदों के वर्ग मूलों का अंतर इस वर्ग के वर्ग मूल के तुल्य होगा ॥ जैसे

$अ^२ + २ अ य + य^२$ इस पूर्ण वर्ग के पद अ अक्षर के घातों के अनुसार क्रम से लिखे हैं और उस पूर्ण वर्ग का वर्ग मूल $\sqrt{अ^२} + \sqrt{य^२}$ या $अ + य$ यह है कारण यह है कि जो $अ + य$ इस का वर्ग करें तो वह $अ^२ + २ अ य + य^२$ होता है इसी रीति से $अ^२ - २ अ य + य^२$ इस का वर्ग मूल $अ - य$ है ॥

॥ उदाहरण ॥

$$(१)\ \sqrt{अ^२ + १ + २ अ} = \sqrt{अ^२ + २ अ + १} = \sqrt{अ^२} + \sqrt{१} = अ + १$$

$$(२)\ \sqrt{य^२ + ९ - ६ य} = \sqrt{य^२ - ६ य + ९} = \sqrt{य^२} - \sqrt{९} = य - ३$$

$$(३)\ \sqrt{४ + र^२ - ४ र} = \sqrt{र^२ - ४ र + ४} = \sqrt{र^२} - \sqrt{४} = र - २$$

$$(४)\ \sqrt{य^२ - प य + \frac{प^२}{४}} = \sqrt{य^२} - \sqrt{\frac{प^२}{४}} = य - \frac{प}{२}$$

(५) $\sqrt{य^2 + ३य + \frac{९}{४}} = \sqrt{य^2} + \sqrt{\frac{९}{४}} = य + \frac{३}{२}$

(६) $\sqrt{म^2य^2 + २मनय + न^2} = \sqrt{म^2य^2} + \sqrt{न^2} = मय + न$

(७) $\sqrt{९य^2र^2 - ६अयर + अ^2} = \sqrt{९य^2र^2} - \sqrt{अ^2} = ३यर - अ$

(८) $\sqrt{\frac{१}{४}अ^2क^2 + अकग + ग^2} = \sqrt{\frac{१}{४}अ^2क^2} + \sqrt{ग^2} = \frac{१}{२}अक + ग$

६५ जो + अ वा − अ का वर्ग करो तो $अ^2$ यह वर्ग होगा इस कारण वर्गमूल के दो चिन्ह होते हैं जैसा ± इसे धन वा ऋण पढ़ते हैं। जैसे

$\sqrt{अ^2} = \pm अ$ ऐसे ही $\sqrt{अ^2क^2} = \pm अक$

$\sqrt{अ^2 + २अय + य^2} = \pm (अ + य)$ आदि

अ + य और −(अ + य) इन दोनों राशियों का वर्ग $अ^2 + २अय + य^2$ है, $-(अ + य) = -अ - य$ इस का वर्ग करते हैं॥

$$
\begin{array}{r}
-अ - य \\
-अ - य \\
\hline
अ^2 + अय \quad\quad \\
अय + य^2 \\
\hline
अ^2 + २अय + य^2
\end{array}
$$
॥

॰ ४४ प्रक्रम ।

इस लिये −अ−य वा −(अ+य) इस का वर्ग अ^२ + २अय + य^२ हुआ कारण यह है अ^२ + २अय + य^२ कि इस का वर्ग मूल −अ−य वा −(अ+य) है ॥

पूर्ण वर्ग उस राशि को कहते हैं जिस का पूर्ण मूल मिल जाय जैसे २५ पूर्ण वर्ग है क्योंकि इस का ५ पूरा वर्ग मूल है और २६ पूर्ण वर्ग नहीं है क्योंकि इस राशि का ठीक मूल नहीं मिल सक्ता वा ऐसी पूर्ण राशि नहीं मिलती कि जो उस का वर्ग करें तो २६ हो ॥

६६ प्र० पूर्ण वर्गों के तीन पदों को एक अक्षर के घातों के अनुसार क्रम से लिखो जैसे य^२ + २अय + अ^२, य^२ − १य + $\frac{१}{४}$, य^२ + ६य + ९ आदि। तो इन में प्रत्येक पूर्ण वर्ग के पदों में यह संबंध दिखाई पड़ता है कि मध्य पद का वर्ग आदि अंत के पदों के चौगुने घात के तुल्य है और जो तीन पदों में यह संबंध न होगा तो उन से पूर्ण वर्ग भी न बनेगा जैसे य^२ − ७य + २६ यह पूर्ण वर्ग नहीं है और इस के आदि अंत की य^२ और २६ यह राशि पूर्ण वर्ग है और उस के पूर्ण वर्ग न होने का कारण यह है ॥

(७य)^२ वा ४९य^२ यह मध्य का वर्ग ४ × २६ य^२ वा ६४ य^२ आदि अन्त के पदों के ४ गुने घात की तुल्य नहीं है परंतु य^२ − ८य + १६ यह राशि पूर्ण वर्ग है अथवा य − ४ इस राशि का वर्ग है और पूर्ण वर्ग होने का यह भी कारण है कि (८य)^२ वा ६४य^२ = ४ × १६ य^२ इन उदाहरणों से यह बात निकलती है कि जो हम दो पदों में तीसरा ऐसा पद जोड़ा चाहें जिस से तीन पद की राशि पूर्ण वर्ग हो जाय तो जिस पद को जोड़ो वह पद ऐसा लेना

चाहिये कि जब तीनों पदों को एक अक्षर के घातों के अनुसार क्रम से लिखें तो मध्य पद का वर्ग आदि अंत के पदों के चौगुने घात के समान हो॥ जैसे

$य^2 + पय$ इस राशि में तीसरा पद मिलाकर पूर्ण वर्ग बनाओ।

कल्पना करो कि पूर्व दोनों पदों में र पद जोड़ने से पूर्ण वर्ग बन जाता है तो $य^2 + पय + र$ यह पूर्ण वर्ग हुआ इस कारण जो पूर्ण वर्ग के पदों में संबंध रहता है उसे देखो॥ तो

$(पय)^2$ वा $प^2य^2 = ४य^2र \therefore र = \frac{प^2}{४}$ अ इसे पूर्ण वर्ग

में र के स्थान में रक्खा तो $य^2 + पय + \frac{प^2}{४}$ यह इस पूर्ण वर्ग हुआ॥

इसी रीति से जो $य^2 - पय$ इस राशि में $\frac{प^2}{४}$ मिलावें

तो $य^2 - पय + \frac{प^2}{४}$ यह पूर्ण वर्ग $य - \frac{प}{२}$ इस राशि का होगा॥

॥उदाहरण॥

$य^2 + ६य$ इस में $(\frac{६}{२})^2$ ३^2 जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का $य + ३$ मूल होगा॥

$य^2 - ८य$ इस में जो $(\frac{८}{२})^2$ वा ४^2 जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का $य - ४$ मूल होगा॥

$य^2 + ५य$ इस में जो $(\frac{५}{२})^2$ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का मूल $य + \frac{५}{२}$ होगा॥

$य^2 + ३य$ इस में जो $(\frac{३}{२})^2$ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का मूल $य + \frac{३}{२}$ होगा ॥

$य^2 - \frac{३}{२}य$ इस में जो $(\frac{३}{४})^2$ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का मूल $य - \frac{३}{४}$ होगा ॥

॥५ अभ्यास के लिये प्रश्न॥

नीचे जो राशि लिखी हैं उनका वर्गमूल निकालो ।

(१) $४अ^2क^2$ ॥

(२) $९य^2र^2$ ॥

(३) $१०० अ^2क^4ग^6$ ॥

(४) $\frac{९अ^2य^2}{४क^2}$ ॥

(५) $\frac{४अ^2क^2}{९य^2र^4}$ ॥

(६) $\frac{१}{४} \cdot \frac{म^2य^4}{न^2र^2}$

(७) $१ + य^2 - २य$ ॥

(८) $४य^2 + ४य + १$ ॥

(९) $४अ^2 + क^2 - ४अक$ ॥

(१०) $९य^2 + ६य + १$ ॥

(११) $य^2 + य + \frac{१}{४}$ ॥

(१२) $य^2 + \frac{१}{य^2} - २$ ॥

।नीचे जो राशि लिखी हैं उन्हें पूर्ण वर्ग बनाओ॥

(१३) $य^2 - १२य$

(१४) $य^2 - १४य$

(१५) $य^2 + ११य$

(१६) $य^2 + २य$

(१७) $य^2 - य$

(१८) $य^2 + \frac{७य}{५}$

(१९) $य^2 - \frac{२य}{७}$

(२०) $य^2 + \frac{१}{२}य$ ॥

(२१) $य^2 - \frac{१}{३}य$ ॥

(२२) $य^2 - \frac{५}{६}य$ ॥

(२३) $य^2 - \frac{३य}{४}$ ॥

(२४) $य^2 - \frac{७य}{६०}$

॥वर्ग समीकरण॥

६७ परिभाषा वर्ग समीकरण दो प्रकार का होता है एक

चाहिये कि जब तीनों पदों को एक अक्षर के घातों के अनुसार क्रम से लिखें तो मध्य पद का वर्ग आदि अंत के पदों के चौगुने घात के समान हो॥ जैसे

$य^2 + पय$ इस राशि में तीसरा पद मिलाकर पूर्ण वर्ग बनाओ।

कल्पना करो कि पूर्व दोनों पदों में र पद जोड़ने से पूर्ण वर्ग बन जाता है तो $य^2 + पय + र$ यह पूर्ण वर्ग हुआ इस कारण जो पूर्ण वर्ग के पदों में संबंध रहता है उसे देखो॥ तो

$(पय)^2$ वा $प^2य^2 = ४य^2र \therefore र = \frac{प^2}{४}$ अब इसे पूर्ण वर्ग

में र के स्थान में रक्खा तो $य^2 + पय + \frac{प^2}{४}$ यह इष्ट पूर्ण वर्ग हुआ॥

इसी रीति से जो $य^2 - पय$ इस राशि में $\frac{प^2}{४}$ मिलावें

तो $य^2 - पय + \frac{प^2}{४}$ यह पूर्ण वर्ग $य - \frac{प}{२}$ इस राशि का होगा॥

॥ उदाहरण ॥

$य^2 + ६य$ इस में $(\frac{६}{२})^2$ वा ३^2 जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का $य + ३$ मूल होगा॥

$य^2 - ८य$ इस में जो $(\frac{८}{२})^2$ वा ४^2 जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का $य - ४$ मूल होगा॥

$य^2 - ५य$ इस में जो $(\frac{५}{२})^2$ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का मूल $य + \frac{५}{२}$ होगा॥

य^{२} + $\frac{३}{२}$ य इस में जो ($\frac{३}{४}$)^{२} जोडो तो पूर्ण वर्ग का मूल य + $\frac{३}{४}$ होगा॥

य^{२} — $\frac{३}{२}$ य इस में जो ($\frac{३}{४}$)^{२} जोडो तो पूर्ण वर्ग का मूल य − $\frac{३}{४}$ होगा॥

॥५ अभ्यास के लिये प्रश्न॥

नीचे जो राशि लिखी हैं उनका वर्ग मूल निकालो ।

(१) ४अ^{२}क^{२} ॥

(२) ९य^{२}र^{२} ॥

(३) १००अ^{२}क^{४}ग^{६} ॥

(४) $\frac{९अ^{२}य^{२}}{४क^{२}}$ ॥

(५) $\frac{४अ^{२}क^{२}}{९य^{२}र^{४}}$ ॥

(६) $\frac{१}{४}\cdot\frac{म^{२}य^{४}}{न^{२}र^{२}}$

(७) १+य^{२} − २य ॥

(८) ४य^{२} + ४य + १ ॥

(९) ४अ^{२} + क^{२} − ४अक ॥

(१०) ९य^{२} + ६य + १ ॥

(११) य^{२} + य + $\frac{१}{४}$ ॥

(१२) य^{२} + $\frac{१}{य^{२}}$ − २ ॥

।नीचे जो राशि लिखी हैं उन्हें पूर्ण वर्ग बनाओ॥

(१३) य^{२} − १२य

(१४) य^{२} − १४य

(१५) य^{२} + ११य

(१६) य^{२} + २य

(१७) य^{२} − य

(१८) य^{२} + $\frac{४य}{५}$

(१९) य^{२} − $\frac{२य}{७}$

(२०) य^{२} + $\frac{१}{२}$य ॥

(२१) य^{२} − $\frac{३}{२}$य ॥

(२२) य^{२} − $\frac{५}{६}$य ॥

(२३) य^{२} − $\frac{३य}{४७}$ ॥

(२४ य^{२} − $\frac{७य}{१०}$

॥वर्ग समीकरण॥

६७ परिभाषा वर्ग समीकरण दो प्रकार का होता है एक

वर्गसमीकरण और दूसरा मध्यमाहरण प्रथम ४६ प्रक्रम से ४८ प्रक्रम तक जो २ रीति लिखी हैं उनकी क्रिया जिस समीकरण पर करने से समीकरण में केवल अव्यक्त राशि का वर्ग रह जाय जैसे $य^2$ तो ऐसे समीकरण को वर्ग समीकरण कहेंगे दूसरे जिन समीकरणों में अव्यक्त राशि का वर्ग और उस का पहिला घात दोनों रहते हों जैसे $य^2$ और य ऐसे समीकरणों को मध्यमाहरण कहेंगे ॥

६८ प्र॰ जिस रीति से एक घात एक वर्ण समीकरण में अव्यक्त राशि का मान निकल आता है उस रीति से वर्ग समीकरण में अव्यक्त राशि के वर्ग का मान निकल आवेगा फिर वर्गमूल निकालने से अव्यक्त राशि का इष्ट मान मिल जायगा और जो पहिले ही समीकरण में अव्यक्त राशि व्यक्त राशि के साथ ऐसे स्वरूप में मिली हो जैसे $(य-अ)^2 = क$ इस समीकरण में य अव्यक्त राशि, अ, व्यक्त राशि के साथ मिली है वा समीकरण का लघुतम रूप करने से उसमें अव्यक्त राशि, व्यक्त राशि के साथ पूर्व स्वरूप में मिली हो ॥

जैसे $(य-अ)^2 = क$ इसका वर्गमूल निकाला तो $य-अ = \pm\sqrt{क}$ इस कारण पक्षांतरानयन से $य = अ \pm \sqrt{क}$

॥ उदाहरण ॥

(१) $३य^2 - २ = २य^2 + २$ इस वर्ग समीकरण में य का मान बताओ ॥

पक्षांतरानयन से $३य^2 - २य^2 = २+२$

योग करने से $य^2 = ४$

वर्गमूल निकालने से $य = \sqrt{४} = \pm २$

(२) $\frac{य^२}{३} - \frac{य^२}{४} \ \frac{य^२}{१६} = \frac{१}{३}$ इसमें य का मान निकालो छेदगम के अर्थ हरों के लघुसमापवर्त्य ४८ से

समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो तो

$१६य^२ - १२य^२ - ३य^२ = १६$

योग करने से $य^२ = १६$

वर्गमूल निकालने से $य = \sqrt{१६} = \pm ४$

(३) $७(२य^२ - ६) + ५(३ - य^२) = १९८$ इसमें य का मान बताओ॥

$७(२य^२ - ६) = १४य^२ - ४२$ और $५(३ - य^२) = १५ - ५य^२$

इस कारण ४४ प्रक्रम के अनुसार कोष्ठ को दूर किया। तो

$१४य^२ - ४२ + १५ - ५य^२ = १९८$

पक्षांतरानयन से $१४य^२ - ५य^२ = १९८ + ४२ - १५$

योग करने से $९य^२ = २२५$

९ का भाग देने से $य^२ = \frac{२२५}{९} = २५$

वर्गमूल निकालने से $य = \sqrt{२५} = \pm ५$

(४) $\frac{४}{३+य} + \frac{४}{३-य} = ३$ इस समीकरण में य का मान बताओ

३+य से गुणा किया तो $४ + \frac{१२+४य}{३-य} = ९ + ३य$

पक्षांतरानयन से $\frac{१२+४य}{३-य} = ५ + ३य$

३−य से गुणा किया तो $१२ + ४य = १५ + ९य - ५य - ३य^२$

पक्षांतरानयन से $३य^२ + ४य + ५य - ९य = १५ - १२$

योग करने से $३य^२ = ३$

३ का भाग देने से $य^२ = १$

वर्गमूल निकालने से $य = \sqrt{१} = \pm १$॥

(५) $(४य - ५)^२ = ४य$ तो य का मान बताओ

वर्गमूल निकालने से $४य - ५ = \pm २य$ ॥

पक्षांतरानयन से $४य \pm २य = ५$ ॥

$\pm$ इस चिन्ह को ऋण वा धन पढ़ते हैं ॥

इस कारण $२य = ५$ वा $६य = ५$ ॥

इसलिये $य = २\frac{१}{२}$ वा $य = \frac{५}{६}$ ॥

अभ्यास के लिये प्रश्न

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उन में य का मान बताओ ॥

(१) $३य^{२} - ५ = \frac{८य^{२}}{३} + ७$ ॥

(२) $(य + ८)^{२} = २य + १७$ ॥

(३) $(य + २)^{२} = ४य + ५$ ॥

(४) $(२य - ५)^{२} = य^{२} - २०य + ७३$

(५) $य^{२} - \frac{३य^{२} - २}{५} = ३ - \frac{२य^{२} - ५}{३}$ ॥

(६) $\frac{२य^{२} + १०}{२५} = ७ - \frac{५० + य^{२}}{२५}$ ॥

(७) $\frac{य^{२}}{५} - \frac{य^{२}}{१५} + \frac{य^{२}}{२५} = ४\frac{२}{३}$ ॥

(८) $१३\frac{३}{४} - \frac{य^{२}}{२} = २य^{२} - ८\frac{३}{४}$ ॥

(९) $\frac{२}{१ + य} + \frac{३}{१ - य} = ८$

(१०) $\frac{१}{य^{२}} - \frac{२}{३य^{२} + १} = \frac{५}{४(३य^{२} + १)}$ ॥

(११) $\frac{१४य^{२} + १६}{२१} - \frac{२य^{२} + ८}{८य^{२} - ११} = \frac{२य^{२}}{३}$

(१२) $\left(य - \frac{३}{४}\right)^{२} = \frac{१}{४}$ ॥

६९ मध्यमाहरण में अव्यक्त राशि के मान लाने की रीति लिखते हैं ॥

॥ रीति ॥

प्रथम ४६ प्रक्रम से ४९ प्रक्रम तक जो रीति लिखी हैं उन से इष्ट समीकरण पर छेदगम, पक्षान्तरानयन, योग करना आदि क्रिया करने से पूर्व समीकरण का इस अ$य^2$ + कय = ग मध्यमाहरण का सा स्वरूप कर लो जिस से जितने पदों में अव्यक्त राशि का वर्ग हो उन का योग करके वे सब अ$य^2$ इस स्वरूप में आजांय और जितने पदों में अव्यक्त राशि का पहिला घात होवे सब योग करके से कय ऐसे स्वरूप में इकट्ठे हो जांय तो अ$य^2$ इस स्वरूप की राशि को और कय इस स्वरूप की राशि को समीकरण के एक पक्ष में लिखो और सब व्यक्तराशियों को इकट्ठा कर जैसे ग दूसरे पक्ष में लिखो ॥

दूसरे जब समीकरण का अ$य^2$ + कय = ग ऐसा स्वरूप हो जाय तो समीकरण की प्रत्येक राशि में अव्यक्त राशि के वर्ग वा $य^2$ इस के गुण का भाग दो तो समीकरण का $य^2 + \frac{क}{अ}य = \frac{ग}{अ}$ ऐसा स्वरूप हो हो जायगा और जो भाग देने से $\frac{क}{अ}$ और $\frac{ग}{अ}$ ये भिन्न पूर्णांक हो जाय तो करलो ॥

तीसरे जब समीकरण का $य^2 + \frac{क}{अ}य = \frac{ग}{अ}$ वा भाग देने में $य^2$ + घय = च ऐसा स्वरूप हो जाय तो समीकरण के प्रत्येक पक्ष में य अव्यक्त राशि आधे गुण का वर्ग जोड़ दो तो जिस ओर के पक्ष में अव्यक्त राशि होंगी उन को मिलाकर पूर्ण वर्ग हो जायगा ॥

चौथे जब अव्यक्त राशियों का पक्ष पूर्ण वर्ग हो जाय

तो समीकरण के हर एक पक्ष का जुदा २ वर्ग मूल निकाल लो इस्से पूर्व समीकरण का एक वर्ण एक घात समीकरण का स्वरूप हो जायगा इस कारण उस में से य अव्यक्त राशि का मान एक वर्ण एक घात समीकरण सम्बन्धी पूर्व रीतियों पर क्रिया करने से निकल आवेगा ॥

॥ उदाहरण ॥

$३य^२ - १२य + ३२ = य^२ + १२य - ३२$ इस समीकरण में य का मान बताओ ॥

पक्षान्तरानयन से $३य^२ - य^२ - १२य - १२य = -३२ - ३२$ ॥

योग करने से $२य^२ - २४य = -६४$

दो का भाग देने से $य^२ - १२य = -३२$

दोनों पक्षों में $\left(\frac{१२}{२}\right)^२$ वा $६^२$ जोड़ा तो $य^२ - १२य + ६^२$

$= ३६ - ३२ = ४$

वर्ग मूल निकालने से $य - ६ = \pm २$

इस कारण से $य = ६ \pm २ = ८$ वा ४

य राशि के ८ और ४ इन दोनों मानों को पृथक २ इस समीकरण में य के स्थान में रक्खो तो भी समीकरण की समता बनी रहेगी। जैसे समीकरण में य के स्थान में ८ रक्खा ॥

$३ \times ८^२ - १२ \times ८ + ३२ = ८^२ + १२ \times ८ - ३२$

वा $१९२ - ९६ + ३२ = ६४ \;\; ९६ - ३२$

योग करने से $१२८ = १२८$

दूसरे य के स्थान में ४ रक्खा तो

$$३ \times ४^{२} - १२ \times ४ + ३२ = ४^{२} + १२ \times ४ - ३२$$

$$\text{वा } ४८ - ४८ + ३२ = १६ + ४८ - ३२$$

$$\text{योग करने से } ३२ = ३२$$

॥ उदाहरण ॥

(१) $५(\text{य}^{२} - ५) - २\text{य}(\text{य} - १) = ६०$ इस समीकरण में य का मान बताओ ॥

$५(\text{य}^{२} - ५) = ५\text{य}^{२} - २५$ और $२\text{य}(\text{य} - १) = २\text{य}^{२} - २\text{य}$ इस लिये $५\text{य}^{२} - २५ - २\text{य}^{२} + २\text{य} = ६०$ ॥

$$\text{पक्षान्तरानयन से } ५\text{य}^{२} - २\text{य}^{२} + २\text{य} = ६० + २५ ॥$$

$$\text{योग करने से } ३\text{य}^{२} + २\text{य} = ८५ ॥$$

$$३ \text{ का भाग देने से } \text{य}^{२} + \frac{२}{३}\text{य} = \frac{८५}{३} ॥$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों में $\left(\frac{१}{३}\right)^{२}$ जोड़ा ॥ तो

$$\text{य}^{२} + \frac{२}{३}\text{य} + \left(\frac{१}{३}\right)^{२} = \frac{८५}{३} + \frac{१}{९} = \frac{२५५ + १}{९} = \frac{२५६}{९} ॥$$

$$\text{दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया } \text{य} + \frac{१}{३} = \sqrt{\frac{२५६}{९}} = \pm \frac{१६}{३} ॥$$

$$\text{पक्षान्तरानयन से } \text{य} = \pm \frac{१६}{३} - \frac{१}{३} = \frac{१५}{३} \text{ वा } - \frac{१७}{३} ॥$$

$$= ५ \text{ वा } - ५\frac{२}{३} ॥$$

(२) $\text{य}^{२} + \text{प}\text{य} = \text{म}$ इस समीकरण में य का मान बताओ
समीकरण के दोनों पक्षों में $\left(\frac{\text{प}}{२}\right)^{२}$ जोड़ा ॥ तो

$$\text{य}^{२} + \text{प}\text{य} + \left(\frac{\text{प}}{२}\right)^{२} = \left(\frac{\text{प}}{२}\right)^{२} + \text{म} ॥$$

$$= \frac{\text{प}^{२}}{४} + \text{म} ॥$$

$$\text{दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया तो } \text{य} + \frac{\text{प}}{२} = \pm \sqrt{\frac{\text{प}^{२}}{४} + \text{म}} ॥$$

पक्षान्तरानयन से $य = -\frac{प}{२} \pm \sqrt{\frac{प^२}{४} + म}$ ॥

इस समीकरण में प और म राशियों के स्थान में चाहो सो संख्या मान लो तो भी समीकरण की समता बनी रहेगी और जो म अभाहरण हुए $य^२ + पय = म$ स्वरूप के होंगे उन में अव्यक्त राशि का मान लाने के अर्थ केवल

$य = -\frac{प}{२} \pm \sqrt{\frac{प^२}{४} + म}$ इस समीकरण में प और म राशियों के स्थान में जो संख्या इष्ट समीकरण में हो उन्हें रखने से अव्यक्त राशि का मान निकल आवेगा जैसे $य^२ + ४य = १२$ इस समीकरण में $य^२ + पय = म$ इस समीकरण की अपेक्षा $प = ४$ और $म = १२$ इस लिये य

$= \frac{प}{२} \pm \sqrt{\frac{प^२}{४} + म} = -\frac{४}{२} \pm \sqrt{\frac{४^२}{४} + १२}$

$= -२ \pm \sqrt{१६} = -२ \pm ४ = २$ वा -६

(४) $\frac{य+२}{य-२} - \frac{य-२}{य+२} =$ इस समीकरण में य का मान बताओ।

छेद गम के अर्थ दोनों पक्षों को $(य-२)(य+२)$ से गुणा तो

$(य+२)^२ - (य-२)^२ = (य-२)(य+२)$ ॥

वा $य^२ + २य + २ - य^२ + २य - २ = य^२ - २$ ॥

पक्षान्तरानयन और योग करने से $य^२ - ४य = २$ ॥

दोनों पक्षों में $(\frac{४}{२})^२$ या ४ जोड़ा तो $य^२ - ४य + ४ = ६$ ॥

दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया $य - २ = \pm\sqrt{६}$ ॥

इस कारण पक्षान्तरानयन से $य = \pm\sqrt{६}$ ॥

(५) $य^२ + य + २ = \frac{२}{य+२}$ इस समीकरण में य का मान बताओ ॥

पहिले पक्ष के भिन्नों को सम छेद करके जोड़ा ॥ तो

$\frac{य+२+य}{य^{२}+य} = \frac{२}{य+२}$ या $\frac{२य+२}{य^{२}+य} = \frac{२}{य+२}$ ॥

छेद गम के अर्थ दोनों पक्षों को $(य^{२}+य)(य+२)$ ॥
से गुणा तो $(२य+२)(य+२) = य^{२}+य$ ॥
या $२य^{२}+५य+२ = य^{२}+य$ ॥

पक्षान्तरानयन और योग करने से $य^{२}+४य = -२$
दोनों पक्षों में $(\frac{४}{२})^{२}$ वा ४ जोड़ा तो $य^{२}+४य+४ = ४-२ = २$
दोनों पक्षों का मूल लिया तो $य+२ = \pm\sqrt{२}$ ॥

पक्षान्तरानयन से $य = -२ \pm \sqrt{२}$ ॥

॥ पूर्ण वर्ग करने का सूत्र लिखते हैं ॥

श्री धराचार्य सूत्रं ॥ चतुराहत वर्ग समै रूपैः पक्षद्वयं गुणयेत् अव्यक्त वर्ग रूपैर्युक्तौ पक्षौ ततो मूलम् १ ॥

इस का यह अर्थ है कि दोनों पक्षों को अव्यक्त राशि के वर्ग के चार गुने गुण से गुणा करो और फिर दोनों पक्षोंमें अव्यक्त राशि के एक घात के गुण का वर्ग जोड़ दो अर्थात जो समीकरण का $अय^{२}+कय = ग$ यह स्वरूप हो और क और ग राशि ऋण हों वा धन तो समीकरण के दोनों पक्षों को ४ अ वा $य^{२}$ के ४ गुने गुण से गुणा करदो और फिर दोनों पक्षोंमें $क^{२}$ वा य के गुण का वर्ग जोड़ दो और फिर दोनों पक्षों का वर्ग मूल निकालो ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $३य^{२}+२ = ८५$ इस समीकरण में य का मान बताओ ॥
४×३ या १२ से गुणा तो $३६य^{२}+२४य = १०२०$

२^2 वा ४ को दोनों पक्षों में जोड़ा तो $३६ य^2 + २४ य + ४ = १०२४$

दोनों पक्षों का वर्गमूल निकाला तो $६ य + २ = \pm ३२$

पक्षान्तरानयन से $६ य = \pm ३२ - २$
$= ३०$ वा -३४

६ का भाग देने से $य = ५$ वा $-५\frac{२}{३}$ ॥

(२) $५य^2 - ९य + २\frac{१}{४} = ०$ इसमें य का मान बताओ॥

पक्षान्तरानयन से $५य^2 - ९य = -२\frac{१}{४}$ ॥

४×५ वा २० से गुणा किया तो $१००य^2 - १८०य = -४५$

दोनों पक्षों में ९^2 वा ८१ जोड़ा तो

$१००य^2 - १८०य + ८१ = ८१ - ४५ = ३६$

दोनों पक्षों का मूल लिया $१०य - ९ = \pm ६$

पक्षान्तरानयन से $१०य = ९ \pm ६$
$= १५$ वा ३

१० का भाग देने से $य = \frac{१५}{१०}$ वा $\frac{३}{१०}$
$= \frac{३}{२}$ वा $\frac{३}{१०}$ ॥
$= १\frac{१}{२}$ वा $\frac{३}{१०}$ ॥

॥ ६ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१) $य^2 = ३य + २०$ ॥

(२) $य^2 = ५य - ४$ ॥

(३) $य^2 - ८य = य - १८$ ॥

(४) $य^2 - १४य = १२०$ ॥

(५) $११य - २८ = य^2$ ॥

(६) $४य - य^2 = ४$ ॥

(७) $७य - य^2 = ६$ ॥

(८) $य = य^2 - ३०$ ॥

(९) $य^2 + \frac{य}{२} = ३$ ॥

(१०) $य^2 - \frac{३य}{२} = २७$ ॥

(११) $य^2 + \frac{२य}{३} = ६३$ ॥

(१२) $९य - ५य^2 = २\frac{१}{४}$ ॥

(१३) $७य + २य^2 = ९$ ॥

(१४) $\frac{य^2}{३} + \frac{३य}{५} = २१$ ॥

(१५) $\frac{य^2}{३} - \frac{य}{३} = ३४$ ॥

(१६) $११य^2 - ९य = ११\frac{१}{५}$ ॥

(१७) $३या^{२} - ५या + २ = ०$ ॥

(१८) $\frac{१}{५} या^{२} - \frac{१}{३} या - २\frac{२}{३} = ०$ ॥

(१९) $\frac{१}{२} या^{२} - \frac{१}{३} या + ७\frac{३}{८} = ८$ ॥

(२०) $\frac{३}{४} या^{२} - \frac{२}{३} या = १\frac{२}{३}$ ॥

(२१) $५(या^{२} + १) - ३(या - १) = २२$ ॥

(२२) $या^{२} - ४ = १६ - (या - २)^{२}$ ॥

(२३) $२(या - २)^{२} - ३ = ८(या + २)$ ॥

(२४) $\frac{३}{४}(या^{२} - ३) = \frac{१}{८}(या - ३)$ ॥

(२५) $३(२ - या) + २(३ - या) = २(४ + ३या^{२})$ ॥

(२६) $या^{२} + (या + १)^{२} = \frac{१३}{६} या(या + १)$ ॥

(२७) $४(या - १) - \frac{या - १}{२या} = ३\frac{३}{४}$ ॥

(२८) $\frac{६}{१ + या} + \frac{२}{या} = ३$ ॥

(२९) $\frac{८०}{या + ४} = \frac{८०}{या} - १$ ॥

(३०) $\frac{२}{या - १} \quad \frac{२}{या + १} = \frac{१}{३५}$ ॥

(३१) $\frac{या + २}{या - १} - \frac{४ - या}{२या} = २\frac{१}{३}$ ॥

(३२) $\frac{४या}{५ - या} - \frac{४(५ - या)}{या} = १५$ ॥

(३३) $\frac{३य-७}{५} = ३\frac{१}{२} - \frac{५(य-२\frac{१}{२})}{य+५}$ ॥

(३४) $\frac{४य-३}{३य-७} - \frac{२य-३}{य-१} = ३$ ॥

(३५) $\frac{७+य}{७-य} + \frac{७-य}{७+य} = २\frac{८}{१०}$ ॥

(३६) $\frac{३य-५}{२य+५} + \frac{२३५}{२७६} = \frac{३य+५}{३य-५}$ ॥

(३७) $\frac{३य+२}{३य-२} + \frac{३य-२}{३य+२} = \frac{१५य+१२}{३य+२}$ ॥

(३८) $\frac{३}{५-य} + \frac{२}{६-य} = \frac{८}{य+२}$ ॥

(३९) $\frac{८य+३}{१०-य} = \frac{२य}{२५-३य} - ६\frac{१}{२}$ ॥

(४०) $\frac{य+८}{य+२२} + \frac{५}{य+३} = \frac{३य+२४}{२य+८}$ ॥

(७१) कभी २ ऐसा भी होता है कि जब दो समीकरणों में दो अव्यक्त राशि रहती हैं तो उन दो समीकरणों में एक वर्ण शोधन से मध्यमाहरण समीकरण निकल आता है और इस में अव्यक्त राशि का मान मध्यमाहरण संबंधी रीतियों से ले आओ और इस मान को इन समीकरणों में से एक समीकरण में रख दो फिर एक वर्ण एक घात समीकरण संबंधी रीतियों से दूसरी अव्यक्त राशि का मान निकालो॥

॥ उदाहरण ॥

$२य - ८ = य - र$ \
और $यर - र = २य + २$ } य और र का मान बताओ॥

पहिले समीकरण में पक्षान्तरानयन से॥

$$२य - य = ८ - र$$ ॥

योग करने से $य = ८ - र$

पक्षान्तरानयन से $र = ८ - य$

र के मान $८ - य$ को दूसरे इष्ट समीकरण में रक्खा। तो

$य(८ - य) - (८ - य) = २य + २$

वा $८य - य^२ - ८ + य = २य + २$ पक्षान्तरानयन और योग करने से $य^२ - ७य = -१०$ दोनों पक्षों में $(\frac{७}{२})^२$ जोड़ा तो $य^२ - ७य + (\frac{७}{२})^२ = \frac{४९}{४} - १० = \frac{९}{४}$ दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया तो $य - \frac{७}{२} = \pm \frac{३}{२}$ पक्षान्तरानयन से

$$य = \frac{७ + ३}{२} = ५ वा २$$

और $र = ८ - य = ८ - ५$ वा $८ - २ = ३$ वा ६ ॥

(२) $२य^२ - ३यर = २$ \
और $३य + २र = ८य$ } प और र का मान बताओ॥

पहिले समीकरण को २ से गुणा किया तो $४य^२ - ६यर = ४$ \
दूसरे समीकरण को ३य से गुणा किया तो $९य^२ + ६यर = २४य$ }

दोनों समीकरणों का योग करने से $१३य^२ = ४ + २४य$ ॥

पक्षान्तरानयन से $१३य^२ - २४ = ४$ ॥

दोनों पक्षों में १३ का भाग दिया तो $य^२ - \frac{२४}{१३}य = \frac{४}{१३}$

दोनों पक्षों में $(\frac{१२}{१३})^२$ जोड़ा तो $य^२ - \frac{२४}{१३}य + (\frac{१२}{१३})^२ =$

$$\frac{१४४}{(२३)^२}+\frac{४}{(२३)}=\frac{५२+२५९}{(२३)^२}=\frac{२८६}{(२३)^२}$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लिया $य-\frac{१२}{२३}=\pm\frac{२५}{२३}$

पक्षान्तरानयन से $य=\frac{१२}{२३}\pm\frac{२५}{२३}=\frac{१२\pm२५}{}=\frac{२६}{२३}$ वा $\frac{२}{२३}$

$=२$ वा $\frac{२}{२३}$

और दूसरे इष्ट समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$२र=८-३य=८-६$ वा $८+\frac{६}{२३}=२$ वा $८\frac{६}{२३}$

इस लिये २ का भाग देने से $र=१$ वा $४\frac{३}{२३}$

॥ ७ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१) $\left.\begin{array}{l}य-२र=११\\ ३य^२-२र=४०\end{array}\right\}$

(२) $\left.\begin{array}{l}५यर-३र^२=१००\\ ५य-४र=०\end{array}\right\}$

(३) $\left.\begin{array}{l}३य+२र=०\\ \frac{३}{२}य^२-३र^२=२१\end{array}\right\}$

(४) $\left.\begin{array}{l}६(य-र)=२७\\ यर=२८\end{array}\right\}$

(५) $\left.\begin{array}{l}३(य+र)=२\frac{१}{४}\\ ८यर=२\end{array}\right\}$

(६) $\left.\begin{array}{l}२य+३र=११\\ य^२+यर=४\end{array}\right\}$

(७) $\left.\begin{array}{l}र-य=२\\ १०य+र=३यर\end{array}\right\}$

(८) $\left.\begin{array}{l}२य-३र=१\\ २य^२+यर-५र^२=२०\end{array}\right\}$

(९) $\left.\begin{array}{l}५य-२र=४\\ ३य^२+४यर=३६\end{array}\right\}$

(१०) $\left.\begin{array}{l}य+र=५\\ य^२+र^२=१३\end{array}\right\}$

(११) $\left.\begin{array}{l}३य+२र=१८\\ २य^२+३र^२=५६\end{array}\right\}$

(१२) $\left.\begin{array}{l}\frac{४य}{५र}=\frac{२८}{१५}\\ य^२+र^२-यर-७र=\end{array}\right\}$

॥ वर्ग समीकरण सम्बन्धी प्रश्न ॥

(१) वह कौन सी संख्या है कि जो उसे उस के आधे से

गुणा करें तो घात ५० के तुल्य हो ॥

कल्पना करो कि य इष्ट संख्या है

तो $\frac{य}{२}$ आधी इष्ट संख्या हुई

इस लिये प्रश्न के अनुसार $य \times \frac{य}{२} = ५०$

वा $\frac{य^२}{२} = ५०$

२ से गुणा किया तो $य^२ = १००$ ॥

वर्ग मूल लिया तो $य = \pm १०$ ॥

इस कारण इष्ट संख्या +१० मानो वा −१० मानो तो भी प्रश्न की सत्यता बनी रहेगी ॥

क्योंकि $१० \times \frac{१०}{२} = १० \times ५ = ५०$ ॥

और $-१० \times \frac{-१०}{२} = -१० \times -५ = ५०$ ॥

(२) कई आदमियों ने मिलकर कई थान कपड़े के नीलाम में खरीदे और उन्हे बज़ाज़ के हाथ बेचा तो उन को उन थानों के बेंचने में ५॥=) नफ़अ़ बचा और जब उन्हों ने इस नफ़अ़ को बांटा तो जितने मनुष्य साझी थे उतने ही $२\frac{१}{२}$ आने हर एक साझी को मिले तो बतलाओ कि वे कितने साझी थे ॥

कल्पना करो कि य साझियों की संख्या है ॥

तो प्रश्न के अनुसार एक साझी को $य \times २\frac{१}{२}$ नफ़अ़ के मिले होंगे और इस कारण य मनुष्यों को $य \times य \times २\frac{१}{२}$ आने नफ़अ़ के मिले होंगे और ५॥=) सब नफ़अ़ है इस के आने ९० हुए ॥

इस लिये $य \times य \times २\frac{१}{२} = ९०$

$२\frac{१}{२}$ का भाग देने से $य^२ = \frac{९०}{२\frac{१}{२}} = ३६$

दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया तो $य = \pm ९$

इस लिये ९ मनुष्य साझी थे और -९ मनुष्य व्यवहार की रीति से इस प्रश्न का उत्तर ही नहीं सक्ता॥

(३) एक मनुष्य ने जुलाहे से मोटे धोती के जोड़े ६) रुपये को मोल लिये और फिर उसने $१३\frac{१}{२}$ आने एक जोड़े के हिसाब से सब जोड़े बेच डाले तो जितने दामों को उसने एक जोड़ा मोल लिया था उतना उस मनुष्य को नफ़अ़ हुआ तो बतलाओ कि उस मनुष्य ने कितने जोड़े धोती के मोल लिये थे॥

कल्पना करो कि य जोड़ों की संख्या है॥

और सब जोड़ों के दाम ६) के आने किये तो ९६ आने हुए॥

अब त्रैराशिक से १ जोड़े के दाम निकाले।

$य : १ :: ९६ : \frac{९६}{य}$ इतने आने एक जोड़े के दाम हुए और उसने एक जोड़ा $१३\frac{१}{२}$ आने को बेंचा इस लिये उसने सब य जोड़े $य \times १३\frac{१}{२}$ आनों को बेंचे होंगे ये बिकरी के दाम हुए इन में से ख़रीद के दाम निकाल लिये तो $य \times १३\frac{१}{२} - ९६$ इतने आने नफ़अ़ के बच रहे॥

$$\text{इस लिये } य \times १३\frac{१}{२} - ९६ = \frac{९६}{य}$$

दोनों पक्षों को २य से गुणा किया तो $२७य^२ - १९२य = १९२$

$$\text{३ का भाग देने से} \quad ९य^२ - ६४य = ६४$$

$$\text{९ का भाग देने से} \quad य^२ - \frac{६४}{९}य = \frac{६४}{९}$$

पूर्ण वर्ग करने के लिये $\left(\frac{३२}{९}\right)^२$ जोड़ा तो $य^२ - \frac{६४}{९}य + \left(\frac{३२}{९}\right)^२$

$$= \frac{६४}{९} + \frac{१०२४}{८१}$$

$$= \frac{१६००}{८१}$$

दोनों पक्षों का मूल लिया तो $य - \frac{३२}{९} = \pm \frac{५०}{९}$

पक्षान्तरानयन से $य = \frac{३२ \pm ५०}{९} = \frac{७२}{९}$ वा $\frac{८}{९}$

$= ८$ वा $-\frac{८}{९}$

इस लिये आठ जोड़ों की संख्या निकली॥

(४) एक ज़मींदार ने आमोंके पेड़ोंकी पोद लगवाई और उसने बराबर दूर पर बराबर पंक्ति में बराबर२ थांभले एक वर्ग क्षेत्र में खुदवाये और जब उसने एक सिरे से पेड़ धरवाये तो सब थांभले पेड़ों में भर गये और ११ पेड़ और बच रहे फिर उसने इन ११ पेड़ों को एक एक करके एक २ पंक्ति की सीध में लगवा दिये और २४ थांभले और खुदवाये और उसने देखा कि जो इन थांभलों में भी पेड़ लग जांय तो हर पंक्ति में बराबर २ पेड़ हो जांयगे और चाहो जिस ओर से पंक्ति गिनो वर्ग क्षेत्र के स्वरूप में अन्तर न पड़ेगा तो बतलाओ कि उसने कितने पेड़ लगवाये॥

कल्पना करो कि वर्ग क्षेत्र की एक भुज की ओर य पेड़ लगे हैं तो य × य वा $य^२$ इतने पेड़ संपूर्ण वर्ग क्षेत्र में लगे होंगे इस लिये $य^२ + ११$ इतने पेड़ आम के उसने लगवाये और जब उसने एक भुज के य पेड़ों की सीध में १ पेड़ लगवा दिया तो उस भुज की ओर के पेड़ों की संख्या (य + १) हुई और (य + १) × (य + १) वा $(य + १)^२$ इतने पेड़ दूसरे वर्ग क्षेत्र में हो जाते जो २४ पेड़ और होते इस लिये प्रश्न के अनुसार॥

$$(\text{य}+१)^{२}-२४=\text{य}^{२}+११$$

$$\text{वा}\ \text{य}^{२}+२\text{य}+१-२४=\text{य}^{२}+११$$

पक्षान्तरानयन और योग करने से $२\text{य}=३४$

२ का भाग देने से $\text{य}=\frac{३४}{२}=१७$

वर्ग करने से $\text{य}^{२}=२८९$

इस लिये $\text{य}^{२}+११$ वा $२८९+११$ वा ३०० संपूर्ण पेड़ लगे थे।

अकचग वर्ग क्षेत्र के प्रत्येक भुज अक, कच, चग और अग में १७ पेड़ आम के लगे हैं और जो बाक़ी पेड़ ११ बच रहे उन में से प्रथम तो एक पेड़ अक भुज की सीध में लगाया और दूसरे पेड़ को इस भुज के नीचे जो आमों के पेड़ों की पङ्क्ति लगी है उस के सीध में लगाया ऐसे ही ग्यारहवीं पङ्क्ति तक ग्यारहों पेड़ लगा दिये और बाकी छः पङ्क्ति जो नीचे रह गई उन के सीध में एक २ थांभले का चिन्ह कर दिया और फिर सत्तरहवीं पङ्क्ति के थांभले के नीचे से बराबर १८ थांभले और खोद लिये तो अब वर्ग क्षेत्र के प्रत्येक भुज में अठारह थांभले होगये॥

ग ख

च क

(५) एक मनुष्य ने छापे खाने में किताब छापने को दी तो किताबों के सब सफ़ों की छपवाई के दाम २०) ठहरे परंन्तु पीछे से किताब में पांच सफ़े और मिलाये गये और कह सुनके दो आने सफ़ा छपवाई में कमती ठहराया तो सब सफों की छपवाई के दाम २६ ।।।=) ठहरे तो बतलाओ कि पुस्तक में सब कितने सफ़े होंगे॥

कल्पना करो कि पुस्तक में पहिले य सफ़े ये और २०) के आने किये तो ३२० आने हुए॥

और १६॥=) के २७० आने हुए॥

और पहिले य सफ़ों की छपवाई के दाम ३२० आने ठहरे थे इस लिये त्रैराशिक से १ सफ़े की छपवाई के दाम $\frac{३२०}{य}$ आने हुए॥

और पीछे से जब ५ सफ़े और मिलाये गये तो य+५ इतने सफ़ों की छपवाई के दाम २७० आने ठहरे इस लिये त्रैराशिक से १ सफ़े की छपवाई के दाम $\frac{२७०}{य+५}$ आने हुए॥

और पीछे से फ़ी सफ़े की छपवाई के दाम २ आने कम ठहरे थे इस लिये प्रश्न के अनुसार $\frac{३२०}{य}=\frac{२७०}{य+५}+२$

२ का भाग देने से $\frac{१६०}{य}=\frac{१३५}{य+५}+१$ दोनों पक्षों को य (य+५) से गुणा तो $१६०य+८००=१३५य+य^२+५य$॥

पक्षान्तरानयन और योग करने से॥

$य^२-२०य=८००$ दोनों पक्षों में $\left(\frac{२०}{२}\right)^२$ वा १०० जोड़ा $य^२-२०य+१००=९००$ दोनों पक्षों का

वर्ग मूल लिया तो $य-१० = \pm ३०$

पक्षान्तरानयन से $य=१०\pm३०=४०$ वा -२०

इस लिये प्रश्न का ४० सफ़े उत्तर हुआ और न —२० सफ़े क्योंकि —२० कहने से प्रश्न का उत्तर कुछ समझ में नहीं आता और जो कोई पूछे कि किताब में कितने सफ़े हैं और उस का उत्तर दिया जाय कि —२० सफ़े तो यह उत्तर ठीक न होगा॥

(६) १. २. ३. ४. आदि गिन्ती के ऐसे अङ्क हैं कि जो उन को क्रम से लो और पहिले दो अङ्कों को रक्खो तो जो संख्या बनेगी वह शेष दो अङ्कों के घात की तुल्य होगी

तो बताओ कि वे कौन से चार अङ्क हैं ॥

कल्पना करो कि य, य+१, य+२, और य+३ ये ४ अङ्क हैं तो पहिले अङ्क य को दस स्थानीय अङ्क माने तो उस का अर्थ य दहाइयां वा १०य होगा ॥

और य+१ इस दूसरे अङ्क को एक स्थानीय अङ्क था ना तो प्रश्न के अनुसार (य+२)(य+३)॥

तीसरे और चौथे अङ्कों का घात १०य+य+१ के तुल्य होगा ॥ वा (य+२)(य+३)=१०य+य+१ गुणा करके शोध को मिला दिया $य^२+५य+६=११य+१$॥

पक्षान्तरानयन और योग करने से ॥

$$य^२-६य=-५$$

पूर्ण वर्ग करने से

$$य^२-६य+९=९+५=४$$

दोनों पक्षों का मूल लिया तो

$$य-३=\pm २$$

पक्षान्तरानयन से $य=३\pm२=५$ वा १

इस कारण जो य का मान ५ मानो तो ५, ५+१, ५+२, और ५+३ अर्थात् ५, ६, ७ और ८ ये इष्ट अङ्क हुए कारण यह है कि ५६=७×८ और जो य का मान १ मानो तो १, १+१, १+२, १+३ अर्थात् १, २, ३, और ४ इष्ट अङ्क हुए क्योंकि १२=३×४॥

(७) २० पुरुष और स्त्रियों ने पुण्यार्थ ३) इकट्ठे कि ये जिस में सब पुरुषोंने मि लकर बराबर देकर १॥) इकट्ठा किया और सब स्त्रियों ने मिलकर बराबर देकर १॥) इकट्ठा किया परन्तु पुरुष ने स्त्री की अपेक्षा १ आना

अधिक दिया तो बतलाओ कि कितने पुरुष थे और कितनी स्त्रियां ॥

कल्पना करो कि य स्त्रियों की संख्या है और र इतने आने एक स्त्री ने दिये तो जैसे सब पुरुष और स्त्री मिलकर २० हैं इस कारण २० में से य स्त्रियों की संख्या निकाल डाली तो शेष २०—य यह पुरुषों की संख्या हुई और पुरुष ने स्त्री से १ आना अधिक दिया है इस लिये र + १ इतने आने एक पुरुष ने दिये होंगे॥

इस कारण य र इतने आने सब स्त्रियों ने दिये होंगे और (२०—य)(र+१) इतने आने सब मनुष्यों ने दिये होंगे और प्रश्न के अनुसार सब स्त्रियों ने मिलकर सर्व धन ३) वा ४८ आने के आधे २४ आने दिये और सब पुरुषों ने भी मिलकर २४ ही आने दिये ॥

इस लिये $\quad$ यर = २४ $\quad$ इन में य और र राशियों
(२०—य) (र+१) = २४ $\quad$ का मान बताओ ॥

दूसरे समीकरण में गुणा करने से

$$२०र + २० — यर — य = २४$$

और इस समीकरण में र के स्थान में $\frac{२४}{य}$ यह मान जो पहिले समीकरण से निकाला रख दिया ॥ तो

$$२० \times \frac{२४}{य} + २० — २४ — य = २४$$

$$वा\ \frac{४८०}{य} — ४ — य = २४$$

पक्षान्तरानयन से $\frac{४८०}{य}$ — य = २८ ॥

य से गुणा किया तो ४८० — य^{२} = २८य

पक्षान्तरानयन से $४८० = य^२ + २८य$

वा $य^२ + २८य = ४८०$

पूर्ण वर्ग करने से $य^२ + २८य + (१४)^२ = ४८० + १९६ = ६७६$

दोनों पक्षों का मूल लिया तो $य + १४ = \pm २६$

पक्षान्तरानयन से $य = \pm २६ - १४ = १२$ वा -४०

और $२० - य = २० - १२ = ८$ वा $२० - (-४०) = ६०$

और $र = \frac{२४}{य} = \frac{२४}{१२} = २$ वा $\frac{२४}{-४०} = \frac{२४ \div ८}{-४० \div ८} = \frac{-३}{५}$

और $र + १ = ३$ वा $\frac{२}{५}$

इस कारण १२ स्त्रियों की संख्या हुई और हर एक स्त्री ने २ आने दिये और ८ पुरुषों की संख्या है ॥

और हर एक पुरुष ने ३ आने दिये ॥

पूर्व समीकरणों में जो य और र अव्यक्त राशियों के ऋण मान लिये हैं उन को प्रश्न के उत्तर निकालने में मत लो ॥

॥ ८ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१) १, २, ३, आदि गिन्ती के ऐसे दो अंक निकालो जिन का घात १५६ के तुल्य हो ॥

(२) गिन्ती के ऐसे तीन अंक निकालो जिन का योग पहिले दो अंकों के तुल्य हो ॥

(३) २० के ऐसे दो खंड करो कि एक खंड दूसरे खंड के वर्ग के तुल्य हो ॥

(४) ११० के ऐसे दो खंड करो कि एक खंड का वर्ग दूसरे खंड के तुल्य हो ॥

(५) २५ के ऐसे दो खंड करो कि उन दोनों खंडों के

वर्गों का योग ३१३ हो ॥

(६) ३० के ऐसे दो खंड करो कि उन दोनों खंड़ों के वर्गों का अन्तर ३०० हो ॥

(७) दो ऐसी संख्या हैं कि उन का घात १४४ है और जो हर एक संख्या में २ जोड़ दिया जाय तो उन का घात २०० होजाय तो बतलाओ कि वे कौनसी दो संख्या हैं ॥

(८) ऐसी संख्या निकालो कि उस के वर्ग और संख्या में २५६ का अन्तर हो ॥

(९) ऐसा भिन्न बताओ कि वह अपने वर्ग से $\frac{1}{६}$ के अनुमान बड़ा हो ॥

(१०) आगरे से कासी जी तक दो अंगरेज़ों की खड़ खड़िये की डाक बैठी और वे दोनों अंगरेज़ एक ही समय में सवार हुए परंतु एक खड़खड़िये में जो घोड़े अदला बदली से लगे वे दूसरे खड़खड़ियों के घोड़ों से हर एक घंटे में १ मील सिवाय चले और जब अगला खड़ खड़िया २५६ वें मील के पत्थर तक पहुंचा तो बतला ओ कि हर एक खड़खड़िया हर एक घंटे में कितने मील चला होगा ॥

(११) एक बङ्गाली प्रातःकाल के समय में ताजगंज से सिकन्दरे की ओर बग्घी पर बैठकर ६ मील गया परं तु लौटती बेर पैदल आया और बग्घी पीछे २ चली आई जब उसने घड़ी देखी तो मालूम हुआ कि जो समय उसे जाते में लगा था उससे लौटते में ५० मिनट सिवाय लगे और उसने जब अपनी लौटने की चाल को

बग्घी की चाल से मिलाया तो मालूम हुआ कि उस के एक घंटे के चलने में और बग्घी के एक घंटे के चलने में ५ मील का अन्तर पड़ता है तो बतलाओ कि बग्घी एक घंटे में कितने मील चली ॥

(२२) एक दयावान मनुष्य ने ६।) बराबर लागत की मोटी मिरज़ाइयां बनवाकर दीन मनुष्यों को बांट दीं और ऐसे ही दूसरे दयावान दाताने ६।) की मिरज़ाइयां बनवाकर दीन लोगों को बांट दीं परन्तु पहिले दयावान मनुष्यने जो लागत एक मिरज़ाई के बनवाने में लगवाई थी उस्से एक आने कम लागत की मिरज़ाई दूसरे दयावान मनुष्य ने बनवाई इस कारण इसने पांच और अधिक दीन मनुष्यों को मिरज़ाई दीं तो बतलाओ कि पहिले दयावान मनुष्य ने दीनों को मिरज़ाई बांटी और दूसरे दयावान ने कितने मनुष्यों को मिरज़ाई दीं ॥

(२३) कई मनुष्य बराबर हिस्से के साझी थे उनको ७५) रुपये नफ़ा के मिले तो उन्हों ने बराबर २ बांट लिये फिर उन में ६ साझी निकल गए फिर भी बाकी साझियों को ७५) नफ़ा के मिले अब उन्हों ने इस धन को बांटा तो हर एक को पहिले से –) ८ पाई अधिक मिली तो बतलाओ कि पहिले सब कितने साझी थे और हर साझी को सब कितना नफ़ा मिला और जब ६ साझी निकलगए तो हर साझी को सब कितना नफ़ा मिला ॥

(२४) सड़क के किनारे आगरे और कान्हपुर दो

नगरों के बीच ८० मील का अन्तर था जिस दिन एक नगर से एक मनुष्य दूसरे नगर को चला उसी दिन दूसरे नगर में एक मनुष्य पहिले नगर को चला और पहिले नगर का मनुष्य दूसरे मनुष्य की अपेक्षा ६ मील हर रोज़ अधिक चलता और जितने दिन पीछे वे दोनों मनुष्य राह में मिले उतने दिनों की संख्या से दूने मील दूसरा मनुष्य चलता था तो बतलाओ कि हर एक मनुष्य कितने मील रोज़ चलता होगा ॥

(२५) रेल गाड़ी के अगले पहिये पिछले पहियों से छोटे होते हैं जब रेल गाड़ी १२० गज़ चली तो इस बीच में अगले पहियों ने पिछले पहियों की अपेक्षा ६ बार अधिक चक्कर किया परन्तु एक और रेल गाड़ी थी कि उस के पहियों का घेर पहिले रेल गाड़ी के पहियों के घेर से एक २ गज़ बड़ा था और जब यह रेल गाड़ी १२० गज़ चली तो उस के अगले पहिये पिछले पहियों से ४ बार अधिक फिरें तो बतलाओ कि पहिली रेल गाड़ी के अगले पहियों का कितना घेर था और पिछले का कितना ॥

॥ समीकरण सम्बन्धी व्याख्या ॥

७२ प्र० जब समीकरण के दोनों पक्षों में भिन्न पद हों और उनके हरों में केवल अङ्क हों। जैसे ॥

$\frac{या}{३} + \frac{या}{४} + \frac{या}{६} - \frac{या}{२} = १७$ तो ऐसे समीकरणों में य अव्यक्त राशि का अङ्क गणित की रीति से भिन्न का लघुतम स्वरूप करने से मिलेगा और विद्यार्थी को

यह अवश्य चाहिये कि वह पहिले अङ्क गणित अच्छी रीति से सीखलें तिस पीछे बीज गणित का आरम्भ करें क्योंकि बीज गणित में बहुतेरी जगह ऐसे प्रश्न आन पडते हैं कि उन का उत्तर विना अङ्क गणित जाने के उन से नहीं निकल सकेंगे॥

जैसे $\frac{य}{५} + \frac{य}{४} + \frac{य}{३} - \frac{य}{२} = २७$ इस में य का मान बताओ।

क्योंकि $\frac{य}{५} = य \frac{१}{५}$, $\frac{य}{४} = य.\frac{१}{४}$, $\frac{य}{३} = य.\frac{१}{३}$ और $\frac{य}{२} = य \frac{१}{२}$

इसलिये $य.\frac{१}{५} + य.\frac{१}{४} + य.\frac{१}{३} - य.\frac{१}{२} = २७$॥

वा $य\left(\frac{१}{५} + \frac{१}{४} + \frac{१}{३} - \frac{१}{२}\right) = २७$॥

इस कारण $य = \dfrac{२७}{\frac{१}{५} + \frac{१}{४} + \frac{१}{३} - \frac{१}{२}}$

य का मान जो लिखा है इस का लघुतम रूप केवल अङ्क गणित की रीति से क्रिया करने से हो जायगा॥

७३॥ बहुधा जब समीकरणों के उदाहरणों में भिन्न पद होते हैं तो छेद गम क्रिया के स्थान में ऐसी क्रिया करते हैं जो नीचे उदाहरणों पर करी है इससे सहज पड़ता है॥

(१) $\frac{६य-४}{२१} + \frac{य-२}{५य-६} = \frac{२य}{७}$ इस में य का मान बताओ।

क्योंकि $\frac{६य-४}{२१} = \frac{६य}{२१} - \frac{४}{२१} = \frac{२य}{७} - \frac{४}{२१}$ *, †

* ३१ और ३६ प्रक्रम॥

† ३५ प्रक्रम॥

इस लिये $\frac{२य}{७} - \frac{४}{२१} + \frac{य-२}{५य-६} = \frac{२य}{७}$

शोधन और पक्षान्तर नयन से $\frac{य-२}{५य-६} = \frac{४}{२१}$

२१(५य−६) से गुणा करो तो

$$२१य - ४२ = २०य - २४$$

पक्षान्तर नयन और योग करने से य=१८

७४॥ दो वर्ण समीकरण में एक वर्ण शोधन के लिये एक वर्ण का अक्षर के गुणों का लघु समापवर्त्य निकालते हैं परंतु बहुधा दो वर्ण समीकरण में अव्यक्त राशियों का मान विना लघु समापवर्त्य निकालने के मिल जाता है इस रीति को दिखाते हैं॥

।५५ प्रक्रम का दूसरा उदाहरण लिखते हैं।

(२) $\left.\begin{array}{l} ५४य - २२१र = १५ \\ ३६य - ७७र = २२ \end{array}\right\}$ य और र का मान बताओ॥

अन्तर करने से $१८य - ४४र = -६$

२ से गुणा किया तो $३६य - ८८र = -१२$

$\left.\begin{array}{l} ३६य - ८८र = -२२ \\ ३६य - ७७र = २१ \end{array}\right\}$ दूसरा समीकरण॥

अन्तर करने से ११र=३३

११ का भाग देने से र=३

और $१८य = ४४र - ६ = १३२ - ६ = १२६$

१८ का भाग देने से $य = \frac{१२६}{१८} = ७$

।५५ प्रक्रम के प्रश्नों का १६ प्रश्न लिखते हैं।

$\left.\begin{array}{l} १०२य - २४र = ६३ \\ १०३य - २८र = २६ \end{array}\right\}$ य और र का मान बताओ॥

अन्तर करने से २य − ४र = −३४

६ से गुणा किया १२य − २४र = −२०४ }
और १०१य − २४र = ६३ }

अन्तर करने से ८९य = २६७

८९ का भाग देने से $य = \frac{२६७}{८९} = ३$

और ४र = २य + ३४ = ४०

४ का भाग देने से $र = \frac{४०}{४} = १०$ ॥

॥ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

५७य − ३७र = ८६ }
५४य − ३५र = ८२ } य और र का मान बताओ॥

उत्तर य = ८ और र = १०

सम्बन्ध अनुपात ध्रुव राशि और चल राशि परिभाषा

जब समान जाति की एक बड़ी राशि और छोटी राशि में यह सम्बन्ध ढूंढते हैं कि बड़ी राशि में छोटी राशि कितनी है तो इन छोटी राशियां की संख्या को पूर्व दोनों बड़ी छोटी राशियों का सम्बन्ध कहते हैं वा जब सजातीय छोटी राशि और बड़ी राशि में यह सम्बन्ध देखते हैं कि छोटी राशि बड़ी राशि का कौन सा भाग है तो इस भाग को छोटी बड़ी राशियों का सम्बन्ध कहते हैं इस परिभाषा से यह जान पड़ता है कि जब दो राशियों में सम्बन्ध ढूंढना हो तो पहिली राशि से दूसरी राशि का भाग दो जो लब्धि मिले वही इष्ट सम्बन्ध होगा। जैसे बताओ कि ६ और ३ में क्या सम्बन्ध है तो ६ ÷ ३ = २, यही २ का अङ्क ६ और ३

का सम्बन्ध हुआ इस से यह जाना जाता है कि ६ में २ तीन बार है ॥

ऐसे ही ३ और ६ में सम्बन्ध बताओ तो $३ \div ६ = \frac{१}{२}$ ॥

यही ३ और ६ में सम्बन्ध हुआ इस से यह जान पड़ता है कि ६ का ३ तृतीयांश है ॥

ऐसे ही $\frac{अ}{क}$ इस से अ और क इन दो राशियों का सम्बन्ध जाना जाता है अ और क के स्थान में चाहो जो संख्या मान लो और जो क से अ बड़ा हो वा $अ > क$ तो $\frac{अ}{क}$ इस का अर्थ है कि अ में क इस का भाग $\frac{अ}{क}$ बार जाता है और जो क से अ छोटा हो वा $अ < क$ तो $\frac{अ}{क}$ इस का यह अर्थ है कि क में अ, ऐसे $\frac{अ}{क}$ इतने भाग हैं।

जब अ और क दो राशियों का सम्बन्ध लिखना होता है तो $अ : क$ वा $\frac{अ}{क}$ यों लिखते हैं इस लिये $अ : क = \frac{अ}{क}$ वा $अ : क$ और $\frac{अ}{क}$ इन दोनों का एक ही अर्थ है ॥

ऐसे ही $ग : घ = \frac{ग}{घ}$ जो अ और क इन दो राशियों का सम्बन्ध और ग और घ इन दो राशियों का सम्बन्ध समान हो वा $अ : क = ग : घ$ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ तो ॥

ऐसे दो सम्बन्धों की समता को अनुपात कहते हैं और इस के लिखने की यह रीति है जैसे $अ : क : : ग : घ$ इस को यों पढ़ते हैं जो अ और क में सम्बन्ध है वही ग और घ में सम्बन्ध है क्यों कि $\frac{२}{३} = \frac{४}{६}$ ॥

इस लिये $२ : ३ : : ४ : ६$ वा २ और ३ में जो सम्बन्ध है वही ४ और ६ में सम्बन्ध है और २, ३, ४, और ६ इन को अनुपातीय अवयव कहते हैं ॥

विद्यार्थी को चाहिये कि जब दो राशि में सम्बन्ध होतो

उस का भिन्न रूप कर ले वही सम्बन्ध का मापक होगा। जैसे अ और क, इन का सम्बन्ध अ: क वा $\frac{अ}{क}$ है और जो अनुपात हो तो उस के समीकरण का रूप कर लो। जैसे अ: क: : ग: घ इस को $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ यों लिखते हैं॥

सम्बन्ध का जो भिन्न रूप कर लेते हैं इस से जो क्रिया भिन्न पर हो सक्ती है वह सम्बन्ध पर भी हो सक्ती है और भिन्न सम्बन्धी क्रियाओं का वर्णन हो ही चुका है ऐसे ही अनुपात को जो समीकरण के रूप में लिखते हैं इस से समीकरण सम्बन्धी क्रिया अनुपात पर हो सक्ती हैं॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ७: ४ यह एक सम्बन्ध है और ८: ५ यह दूसरा सम्बन्ध है तो बतलाओ कि इन में कौन सा सम्बन्ध बड़ा है

७: ४ इस सम्बन्ध का $\frac{७}{४}$ मापक है॥

८: ५ इस सम्बन्ध का $\frac{८}{५}$ मापक है॥

$\frac{७}{४}$ और $\frac{८}{५}$ इन के हरों का समच्छेद किया। तो

इन भिन्नों का $\frac{३५}{२०}$ और $\frac{३२}{२०}$ यह स्वरूप हुआ और $\frac{३५}{२०}$ =

$\frac{३२}{२०} + \frac{३}{२०}$ इस लिये $\frac{३५}{२०}$ वा $\frac{७}{४}$ $\frac{३२}{२०}$ वा $\frac{८}{५}$ से बड़ा है अ

र्थात् ७: ४ > ८: ५॥

७६ ॥ जो सम्बन्ध के दोनों पदों को एक राशि से गुण करें वा उन में किसी एक राशि का भाग देंतो सम्बन्ध का मान ज्यों का त्योंहीं बना रहेगा ॥

जैसे अ : क यह एक सम्बन्ध है ॥

$अ : क = \frac{अ}{क}$ ७५ वें प्रक्रम के अनुसार ॥

और $\frac{अ}{क} = \frac{म\,अ}{म\,क}$ ३४ वें प्रक्रम के अनुसार ॥

इसलिये $अ : क = \frac{म\,अ}{म\,क} = म\,अ : म\,क$ ॥

उत्क्रम से $म\,अ : म\,क = \frac{म\,अ}{म\,क} = \frac{अ}{क} = अ : क$ ॥

॥ उदाहरण ॥

२ : ३ = ४ : ६, ५ : २ = २५ : ६ २ : ५ = २० : ५०

७७ जो अ : क : : ग : घ तो अ घ = क ग और जो ॥

अ घ = क ग तो अ : क : : ग : घ ॥

क्योंकि अ : क : : ग : घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ इन तुल्य राशियों को

क घ से गुण किया तो $\frac{अ\,क\,घ}{क} = \frac{ग\,क\,घ}{घ}$ ॥

परन्तु अ क घ = क . अ घ और ग क घ = घ क ग

इसलिये $\frac{क\,अ\,घ}{क} = \frac{घ.\,क\,ग}{घ}$ वा अ घ = क ग

जो अ घ = क ग तो इन तुल्य राशियों में क घ का भाग

* ३८ प्रक्रम ॥

दिया तो $\frac{अ घ}{क घ}=\frac{क ग}{क घ}=\frac{ग}{घ}$ [+] वा अ:क::ग:घ॥

इस कारण जो अनुपात के तीन पद मालूम हों तो उन से शेष चौथा पद भी मालूम होजायगा॥

जैसे जो अ:क::ग:य तो पूर्व रीति से अय=कग अ का भाग देने से $य=\frac{कग}{अ}$ यह त्रैराशिक की उपपत्ति हुई और त्रैराशिक की रीति से जो तीन पद अनुपात के जाने हुए रहते हैं तो उन से चौथा पद मिल जाता है॥

७८ जो अ:क::ग:घ तो क:अ::घ:ग क्योंकि अ:क::

ग:घ वा $\frac{अ}{क}=\frac{ग}{घ}$ इन तुल्य राशियों को क घ से गुणा

किया तो अ घ=क ग इन राशियों में अ ग इस का भा

ग दिया तो $\frac{अ घ}{अ ग}=\frac{क ग}{अ ग}$ वा $\frac{घ}{ग}=\frac{क}{अ}$ [*]

वा $\frac{क}{अ}=\frac{घ}{ग}$ इस लिये

क:अ::घ:ग॥

७९ जो अ:क::ग:घ तो अ:ग::क:घ॥

क्योंकि अ:क::ग:घ वा $\frac{अ}{क}=\frac{ग}{घ}$ [+]॥

इन राशियों को $\frac{क}{ग}$ से गुणा किया तो $\frac{क}{ग}\cdot\frac{अ}{क}=\frac{क}{ग}\cdot\frac{ग}{घ}$

वा $\frac{अ क}{क ग}=\frac{क ग}{ग घ}$ वा [‡] $\frac{अ}{ग}=\frac{क}{घ}$ इस लिये अ:ग::क:घ

८० जो अ:क::ग:घ तो अ+क:क::ग+घ:घ

+ ३४ प्रक्रम॥ * ३५ प्रक्रम॥ + ७५ प्रक्रम॥

‡ ३५ प्रक्रम॥

क्योंकि अ : क : : ग : घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ ॥

इन राशियों में १ जोड़ा तो $\frac{अ}{क} + १ = \frac{ग}{घ} + १$ वा $\frac{अ+क}{क}$
$= \frac{ग+घ}{घ}$ इस लिये अ + क : क : : ग + घ : घ ॥

८१ जो अ : क : : ग : घ और ग : घ : : च : ज तो अ : क : : च : ज।

क्योंकि अ : क : : ग : घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$
ग : घ : : च : ज वा $\frac{ग}{घ} = \frac{च}{ज}$

इस लिये $\frac{अ}{क} = \frac{च}{ज}$ कारण यह है कि ये दोनो राशि $\frac{ग}{घ}$ के तुल्य हैं इस लिये अ : क : : च : ज ॥

८२ जो अ : क : : ग : घ और क : च : घ : ज तो अ : च : : ग : ज।

क्योंकि अ : क : : ग : घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ ॥

और क : च : : घ : ज वा $\frac{क}{च} = \frac{घ}{ज}$

इस लिये $\frac{अ}{क} \times \frac{क}{च} = \frac{ग}{घ} \times \frac{घ}{ज}$

वा $\frac{अ क}{क च} = \frac{ग घ}{घ ज}$

वा $\frac{अ}{च} = \frac{ग}{ज}$ इस लिये अ : च : : ग : ज ॥

॥ रेखा गणित के पांचवें अध्याय में जो अनुपात की परिभाषा लिखी है वह यह है ॥

परिभाषा जो चार राशि हों और उन में पहिली और तीसरी राशि एक ही राशि से गुणी जांय और दूसरी और चौथी राशि भी किसी एक राशि से गुणी जांय और जो

† ७५ प्रक्रम ॥	* ७५ प्रक्रम ॥	+ ७५ प्रक्रम
३५ प्रक्रम ॥

पहिली राशि का घात, दूसरी राशि के घात से बड़ा हो और तीसरी राशि का घात भी चौथी राशि के घात से बड़ा हो वा जो पहिली राशि का घात दूसरी राशि के घात के तुल्य हो ॥

और तीसरी राशि का घात भी चौथी राशि के घात से तुल्य हो वा जो पहिली राशि का घात दूसरी राशि के घात से छोटा हो और तीसरी राशि का घात भी चौथी राशि के घात से छोटा हो तो पहिली दूसरी तीसरी और चौथी राशि अनुपातीय होंगी ॥

जो बीज गणित की परिभाषा के अनुसार चार अनुपातीय राशि हों तो वे राशि रेखा गणित की परिभाषा के अनुसार भी अनुपातीय होंगी ॥

जैसे जो अ, क, ग, और घ ये अनुपातीय राशि हों तो $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ इन तुल्य राशियों को $\frac{म}{न}$ राशि से गुणा किया तो $\frac{म}{न} \cdot \frac{अ}{क} = \frac{म}{न} \cdot \frac{ग}{घ}$ ॥

वा[+] $\frac{म\,अ}{न\,क} = \frac{म\,ग}{न\,घ}$ भिन्न के गुण से यह जान पड़ता है कि जो म अ $>$ न क तो म ग $>$ न घ और जो म अ $=$ न क तो म ग $=$ न घ और जो म अ $<$ न क तो म ग $<$ न घ और पहिली और तीसरी राशि अ और ग को म से गुणा किया तो म अ और म ग यह घात हुई और दूसरी और चौथी राशि क और घ को न से गुणा किया तो न क और न घ यह घात हुई इस कारण रेखा गणित की परिभाषा के अनुसार भी अ, क, ग और घ ये चार राशि अनुपातीय हुईं ॥

७५ प्रक्रम

+ ४० प्रक्रम

८४ जब एक राशि के कई जुदे २ मान होते हैं तो ऐसी राशि को चल राशि कहते हैं और जो एक राशि का एक ही मान हो तो ऐसी राशि को ध्रुव राशि कहते हैं। जब दो राशियों में ऐसा सम्बन्ध होता है कि जितनी गुनी एक राशि बढ़ जाय उतनी ही गुनी दूसरी राशि बढ़ जाय वा जितनी गुनी एक राशि घट जाय उतनी ही गुनी दूसरी राशि घट जाय तो ऐसे परस्पर सम्बन्ध को क्रम रूपान्तर कहेंगे॥

जैसे एक मज़दूर जो रोज़ पाता हो और वह अधिक दिन काम करें तो उसे उसी परिमाण से दाम भी सिवाय मिलेंगे और जो वह थोड़े दिन काम करेगा तो उसे उसी परिमाण से दाम भी कमती मिलेंगे इस लिये दाम और दिनों के बीच क्रम रूपान्तर होगा॥

ऐसे ही अ और क जो दो ऐसी राशि हों कि उन के बीच क्रम रूपान्तर हो और जो अ राशि ग के समान हो जाय और क राशि घ राशि के समान तो अ:क::क:घ।

बहुधा दो राशि में ऐसा परस्पर सम्बन्ध रहता है कि जो एक राशि घट बढ़ जाय तो दूसरी राशि भी अवश्य घट बढ़ जायगी परन्तु उन दोनों राशियों के बीच क्रम रूपान्तर न हो जैसे वर्ग क्षेत्र में जो भुज घट बढ़ जाय तो वर्ग क्षेत्र का क्षेत्र फल भी अवश्य घट बढ़ जायगा परन्तु भुज और क्षेत्र फल के बीच क्रम रूपान्तर न होगा कारण यह है कि जो वर्ग क्षेत्र की भुज दूनी हो जाय तो क्षेत्र फल चौगुना हो जायगा॥

जैसे जो भुज का मान २ है तो क्षेत्र फल ४ होगा और

जो भुज का मान २×२ वा ४ हो तो ४×४ वा १६ क्षेत्र फल होगा ऐसे ही जो भुज तीन गुनी हो जाय तो क्षेत्र फल नौ गुना हो जायगा जैसे जो भुज का मान ३×२ वा ६ हो तो ६×६ वा ३६ क्षेत्र फल होगा ॥

जब दो राशियों के बीच $\propto$ ऐसा चिन्ह देखो तो जानो कि दोनों राशियों का रूपान्तर होता है ॥

॥ उदाहरण ॥

र $\propto$ य और जो य = २ और र = २० तो अनुपात बनाओ ॥

जब र का मान २० है तब य का मान २ है और य और र के बीच क्रम रूपान्तर होता है ॥

इस लिये र : २० :: य : २ और* र : य :: २० : २

†वा र : य :: २० : २.

८५ परिभाषा जब किसी राशि का १ में भाग देते हैं तो उस भिन्न को व्यस्त राशि कहते हैं जैसे जो अ एक राशि हो तो $\frac{१}{अ}$ व्यस्त राशि होगी और राशि और व्यस्त राशि में ऐसा सम्बन्ध रहता है कि जो राशि जे गुनी बढ़ जाय तो व्यस्त राशि उतनी ही गुनी घट जायगी और जो राशि जे गुनी घट जाय तो व्यस्त राशि उतनी ही गुनी बढ़ जायगी जैसे ४ संख्या है इस की $\frac{१}{४}$ व्यस्त संख्या हुई जो ४ के स्थान में दो गुना ४ वा २×४ वा ८ संख्या हो तो चौथाई का आधा अर्थात $\frac{१}{२×४}$ वा $\frac{१}{८}$ व्यस्त संख्या होगी और यह चौथाई का आधा है और जो चार के स्थान में ४ का आधा अर्थात $\frac{४}{२}$ वा २ रक्खा जाय तो चौथाई का दूना $\frac{१}{४}$×२ वा $\frac{१}{२}$ व्यस्त संख्या होगी

---

* ७९ प्रक्रम ॥ † ७६ प्रक्रम ॥

और यह चौथाई दूनी है इस लिये जब दो राशियों में ऐसा सम्बन्ध होता है कि जब एक राशि जै गुनी घट जाय तो दूसरी राशि उतनी ही गुनी घट जाय और जो पहिली राशि जै गुनी घट जाय तो दूसरी राशि भी उतनी ही बढ़ जाय तो उसे उत्क्रम रूपान्तर कहेंगे ॥

जैसे अ और क इन का उत्क्रम रूपान्तर होता है तो इस को अ∝ $\frac{१}{क}$ यों लिखते हैं जो अ का स्वरूप ग हो जाय और क का स्वरूप घ तो अ : ग :: $\frac{१}{क}$: $\frac{१}{घ}$ ॥

इस अनुपात की तीसरी और चौथी राशियों को क घ से गुणे* तो अ : ग :: घ : क ॥

जो कोई हरकारह जल्दी से चिट्ठी ले जाता है और जितने समय में वह चिट्ठी पहुंचा देगा उस समय में और उस की शीघ्रता में उत्क्रम रूपान्तर होगा क्योंकि जो वह मनुष्य दूनी जल्दी चले तो वह पूर्व समय की अपेक्षा आधे समय में पहुंचेगा और ऐसे जो वह धीरा चलने लगे तो उस को चिट्ठी पहुंचाने में अधिक समय लगेगा ॥

॥ उदाहरण ॥

र और य में उत्क्रम रूपान्तर है वा र∝ $\frac{१}{य}$ जो य=३ और र=२ तो अनुपात बनाओ।

र : २ :: $\frac{१}{य}$: $\frac{१}{३}$ वा⁑ र : $\frac{१}{य}$ :: २ : $\frac{१}{३}$

वा† र : $\frac{१}{य}$ :: ३ : २

---

* ७६ प्रक्रम ॥ ⁑ ७८ प्रक्रम ॥ † ७६ प्रक्रम

८६ दो राशियों के घात और तीसरी राशि के बीच भी क्रम रूपान्तर होता है॥

जैसे जो मज़दूर जितने आने रोज़ पाता हो उन आनों को जितने दिन वह काम करे उस से गुणा कर दे तो इस घात और उस के सब दामों में क्रम रूपान्तर होगा क्योंकि जो पूर्व्व घात दूना हो जायगा तो उस के दाम भी दूने हो जायगे और घात दो रीति से दूना हो सक्ता है कि तो दिन दूने हो जांय वा एक दिन की मिहनत के दूने दाम हो जांय जैसे जो एक मज़दूर २ आने रोज़ पाता हो और वह ४ दिन काम करे तो उस के सब दाम ४×२ वा ८ आने हुए जो वह ४ आने रोज़ पाने लगे तो वह ४ दिन में ४×४ वा १६ आने कमा लेगा वा जो वह दो ही आने रोज़ पावे परंतु ८ दिन काम करे तो भी वह २×८ वा १६ आने कमावेगा॥

ऐसे ही अ और क ग इन में क्रम रूपान्तर है वा अ∝क ग जो अ का स्वरूप घ हो जाय और क ग का स्वरूप च ज तो अ: घ:: क ग: च ज॥

॥ उदाहरण ॥

ल∝य र, जो य=१, र=२ और ल=२० तो अनुपात बनाओ।

अ:२०::य र:२×२ इस लिये* ल:य र:: २०:२ वा† ल:य र:: १०:१

८७ जो दो चल राशियों में परस्पर क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध हो और उन दोनों राशियों के मान व्यक्त हों तो

* ७८ प्रक्रम॥ † ७६ प्रक्रम॥

रूपान्तर का समीकरण स्वरूप हो सक्ता है ॥

जैसे जो अ ∝ क और अ = ग और क = घ तो अ : ग :: क : घ इस लिये अ घ = ग क घ का भाग देने से

$$अ = \frac{ग क}{घ} = \frac{ग}{घ} . क ॥$$

॥ उदाहरण ॥

र ∝ य और य = १ और र = ३ तो य और र के बीच समीकरण बनाओ ॥

र : ३ :: य : १ इस लिये र = ३ य

जब अ और क दो राशि में क्रम रूपान्तर हो तो $\frac{अ}{क}$ यह सम्बन्ध सदा एकसा बना रहेगा क्योंकि यह तो हम लिखही चुके हैं कि जो भिन्न के अंश और हर को एक राशि से गुण करें वा उन में किसी एक राशि का भाग दें तो भी भिन्न के मान में कुछ अन्तर न पड़ेगा अर्थात् $\frac{अ}{क}$ ध्रुव राशि होगी यह अ और क इन के क्रम रूपान्तर से न बदलेगी इस कारण $\frac{अ}{क}$ इस के स्थान में म.प. वा न कोई एक अक्षर रक्ख देते हैं ॥

जैसे $\frac{अ}{क}$ = म वा अ = म क ॥

जो ग और घ के बीच क्रम रूपान्तर हो वा ग ∝ घ तो $\frac{ग}{घ}$ यह ध्रुव राशि ही बनी रहेगी परन्तु ग और घ के रूपान्तर होने से $\frac{ग}{घ}$ यह राशि $\frac{अ}{क}$ राशि के समान न हो जायगी इस लिये $\frac{ग}{घ}$ को न के समान मान लेंगे और उसे म के समान न मानेंगे क्योंकि म = $\frac{अ}{क}$ इस कारण गुण करने से ग = न घ ॥

---

१७ प्रक्रम ॥ १७ प्रक्रम ॥

॥ उदाहरण ॥

दो राशियों के योग और र राशि के बीच क्रम रूपान्तर है और जिन राशियों का योग है उन में से एक राशि और य राशि के बीच क्रम रूपान्तर है और दूसरी राशि और य² इन के बीच क्रम रूपान्तर है तो इस क्रम रूपान्तर सम्बन्ध का समीकरण स्वरूप करो ॥

कल्पना करो कि $\frac{\text{योग की एक राशि}}{\text{य}}$ = म और

$\frac{\text{योग की दूसरी राशि}}{\text{य}^2}$ = न म और न ध्रुव राशि हैं इस से गुणन करने से योग की एक राशि = मय और योग की दूसरी राशि = नय² और कल्पना करो कि $\frac{\text{मय}+\text{नय}^2}{\text{र}}$ = प यह ध्रुव राशि है इस कारण गुणन करने से मय+नय² = पर यही इष्ट समीकरण हुआ ॥

जो य और र दोनों राशियों के दो दो मान मालूम हो जांय तो म और न ध्रुव राशियों के मान भी मालूम हो जांयगे ॥

॥ ३० अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१) ३ अ : १५ अ ॥
(२) २य : १० य² ॥
(३) अय : कय ॥
(४) अकग : कग ॥
(५) अयर : २य ॥
(६) ३ अकय : २अ²य ॥
(७) अ²पग : ३अगय ॥
(८) ३य²र² : १२य²र² ॥
(९) अग + कग : ग² ॥
(१०) २अय + य² : मय ॥
(११) ९−य² : ३−य ॥
(१२) अ²−क² : अ+क ॥

॥ नीचे जो सम्बन्ध लिखे हैं उनका लघुतम रूप करो॥

(१३) २अय : ४य ॥ (१६) २य²र : ¼य² ॥

(१४) १६यर : २०य² ॥ (१७) $\frac{\text{७अयर}}{१\times२\times३}$: $\frac{\text{५अर}^2}{२\times३\times४}$

(१५) ½ अय : ¾ कय ।

(१८) $\frac{\text{न(न−१)}}{१\times२}$ अय² : नअ²य² ॥

(१९) १५ : १६ यह एक सम्बन्ध है और १६ : १७ दूसरा सम्बन्ध है तो बतलाओ कि इन में कौन सा सम्बन्ध बड़ा है ॥

(२०) जो य : र :: २ : १ तो बतलाओ कि २अय ३कर यह संबन्ध वा ३अ : २क यह सम्बन्ध बड़ा होगा ॥

(२१) जो अ : क :: ग : घ तो बतलाओ कि २अ : ३क :: २ग : ३घ ॥

(२२) जो अ : क :: क : ग तो बतलाओ कि अ : ग :: अ² : क² ॥

(२३) अ : अ+य :: अ−य : क इस अनुपात का समीकरण स्वरूप करो ॥

(२४) य : द :: र : २अ−र इस अनुपात का समीकरण स्वरूप करो ॥

(२५) जो अ+य : अ−य :: ११ : ७ तो अ : य इस सम्बन्ध का मान बताओ ॥

(२६) ऐसी दो संख्या बतलाओ कि उन का सम्बन्ध २ : ३ इस सम्बन्ध के समान हो और इन के योग और घात में जो सम्बन्ध हो वह ५ : १२ इस सम्बन्ध के तुल्य हो ॥

(२७) ग्र स ३ग य ग्रीर $\frac{६कगर}{ग्र}$ ये ग्रनुपात के पहिले तीसरे ग्रीर चौथे पद हैं तो बतलाग्रो कि ग्र नुपात्त का दूसरा कौन सा पद है॥

(२८) दो कौन सी संख्या हैं कि उन का सम्बन्ध २:३ इस सम्बन्ध के तुल्य हो ग्रीर जो उन दोनों संख्याग्रों में ५ जोड़ा जाय तो उन का सम्बन्ध ४:५ इस सम्बन्ध के तुल्य हो॥

(२९) जो र ०= य ग्रीर य= २ ग्रीर र=४ ग्रब तो य ग्रीर र के बीच समीकरण बनाग्रो॥

(३०) जो र ०= $\frac{१}{य}$ ग्रीर य = $\frac{१}{२}$ ग्रीर र=८ तो य ग्रीर र के बीच समीकरण बनाग्रो॥

(३१) जो १+य ०= १—य तो बतलाग्रो कि १+य² ०= य॥

(३२) जो २य+३र ०= ४य+५र तो बतलाग्रो कि य ०= र॥

॥ योगज श्रेढ़ी ग्रीर ग्रंतर श्रेढ़ी॥

(८८) परिभाषा श्रेढ़ी शब्द का ग्रर्थ पङ्क्ति है जब एक पङ्क्ति में राशि इस क्रम से हो कि प्रत्येक दो पास की राशियों के बीच समान ग्रन्तर हो तो ऐसी पङ्क्ति को श्रेढ़ी कहेंगे ग्रीर श्रेढ़ी के पहिले पद को ग्रादि पद वा मुख कहते हैं ग्रीर सब से पहिले पद को ग्रन्त पद कहते हैं ग्रीर प्रत्येक दो राशियों के बीच जो समान ग्रन्तर है उसे चय बोलते हैं ग्रीर मुख ग्रौर ग्रन्त पद के बीच जितने पद हों उन्हें मध्य पद ग्रौर पदों की संख्या को गच्छ ग्रौर श्रेढ़ी के सब पदों

के योग को श्रेढ़ी फल कहते हैं ॥

जैसे १.३.५.७.९.११. आदि इस पङ्क्ति को योगश्रेढ़ी कहेंगे क्यों कि प्रत्येक दो पास के पदों में पहिला पद दूसरे पद से २ के समान बड़ा है वा एक में जो २ जोड़े तो ३ यह श्रेढ़ी का दूसरा पद हुआ ऐसे ही ३ में जो २ जोड़े तो ५ श्रेढ़ी का तीसरा पद हुआ ॥

२०.१८.१६.१४. इस पङ्क्ति को अन्तर श्रेढ़ी कहेंगे क्यों कि प्रत्येक दो आसन्न पदों में पहिला पद दूसरे पद से २ के समान छोटा है ॥

जो श्रेढ़ी का आदि पद अ मानो और च चय मानो तो अ. अ+च. अ+२च. अ+३च. आदि योग श्रेढ़ी हुई और अ. अ−च. अ−२च. अ−३च. आदि अन्तर श्रेढ़ी हुई ॥

पहिली योगज श्रेढ़ी में क्रम से राशि के योग करने से राशि बढ़ती चली जाती है और दूसरी अन्तर श्रेढ़ी में क्रम से च राशि के घटाने से राशि घटती चली जाती है ॥

अपने मन में तो विचारो कि १.३.५.७.९. आदि श्रेढ़ी है वा नहीं विचारे पीछे तुरन्त मालूम होगा कि श्रेढ़ी नहीं है कारण यह है कि एक और ३ के बीच २ का अन्तर है वा ३−१=२ और ४ और ३ के बीच १ का अन्तर है वा ४−३=१ इस लिये जो श्रेढ़ी होती तो परिभाषा के अनुसार प्रत्येक दो पास की राशियों के बीच एक ही सा अन्तर रहता ॥

अपने मन में तो विचार करो कि १.५.९.१३.१७

आदि श्रेढ़ी है वा नहीं विचारते ही मालूम होगा कि श्रेढ़ी है कारण यह है कि ५−१=४ और ९−५ भी=४।

और ऐसे ही १३−९=४ और १७−१३=४ आदि श्रेढ़ी की राशि क्रम से ४ के जोड़ने से बढ़ती चली जाती है ॥

(८९) अ. अ+च. अ+२च. अ.+३च आदि योगज श्रेढ़ी में अ आदि पद है अ+च दूसरा पद है और अ+२च तीसरा पद ऐसे ही और जानो। इस से यह बात निकलती है कि जो स को श्रेढ़ी के किसी पद की संख्या मानो जैसे पहिला वा दूसरा वा तीसरा आदि तो सेवें स्थान का पद अ+(स−१)च इस के तुल्य होगा कारण यह है कि जो स को १ मानो वा पहिला पद निकालना हो तो अ+(स−१)च इस में स के स्थान में १ रक्खा तो अ पहिला पद हुआ क्योंकि अ+(१−१)च=अ+०×च ॥

=अ+०=अ ॥

जो स को २ मानो और दूसरा पद निकालना चाहे तो अ+(स−१)च इस में स के स्थान में २ रक्खो तो अ+च यह दूसरा पद होगा ॥

क्योंकि अ+(२−१)च=अ+१×च=अ+च ॥

जो स को ३ मानकर तीसरा पद निकाला चाहो तो अ+(स−१)च इस में स के स्थान में ३ रखने से अ+२च तीसरा पद हुआ ॥

क्योंकि अ+(३−१)च=अ+२×च=अ×२च ऐसे ही जो चौथा पांचवां आदि पद निकालने हों तो निकाल लो

इसी रीति से अंतर श्रेढ़ी में सोवें स्थान का पद अ−(स−१)च होगा ॥

(६०) इस कारण जो श्रेढ़ी का आदि पद और चय मालूम हो तो उन से श्रेढ़ी का चाहे जिस स्थान का पद निकल सक्ता है ॥

॥ उदाहरण ॥

१, ५, ९, १३, १७, आदि श्रेढ़ी का पचासवां पद बतलाओ यह योग श्रेढ़ी है इस कारण अ+(स−१)च इस में स के स्थान में ५० रक्खा और अ के स्थान में १, और च के स्थान में ५−१ वा ४ रक्खा तो १+(५०−१)४= १+२००−४=१९७ यही श्रेढ़ी का पांचवां पद हुआ ॥

(६१) श्रेढ़ी के पदों का जो योग करना हो अर्थात् श्रेढ़ी फल लाना हो तो उन पदों का योग, योग करने की रीति से कर सक्ते हैं परन्तु जब श्रेढ़ी के बहुत से पद हों तो इस रीति से योग करने में उलझाव दिखाई देगा इस के लिये एक सुगम रीति लिखते हैं ॥

॥ रीति ॥

श्रेढ़ी के आदि और अंत पद के अर्द्ध योग को श्रेढ़ी के पदों की संख्या वा गच्छ से गुण दो वा जो सुगम पड़े तो आदि और अंत पद के योग के आधे गच्छ से गुण दो यही घात इष्ट श्रेढ़ी फल होगा ॥

१, ५, ९, १३, १७, आदि इस श्रेढ़ी के पांच पदों का श्रेढ़ी फल बतलाओ ॥

१ पहिला पद और १७ अन्त पद इन का योग १८

हुआ इसका आधा ९ हुआ इसको ५ गच्छ से गुणा तो ९×५=४५ यह श्रेढ़ी फल हुआ इसकी सत्यता देखने के लिये १+५+९+१३+१७ इसका योग करके देखो कि योग ४५ है या नहीं जो ४५ निकले तो श्रेढी फल ठीक जानो ॥

जो पूर्व श्रेढ़ी के सौवें पद तक सब पदों का योग करना हो तो प्रथम सौवें पद को ढूंढा ॥

१+(१००−१)×४ = १+४००−४ = ३९७

अब इष्ट योग = $\frac{१}{२}$(१+३९७)×१०० = १९९×१०० = १९९००

॥ रीति की उपपत्ति ॥

श्रेढ़ी का आदि पद अ है और च चय है और प पिछला पद वा अंत पद है ॥ तो

अ, अ+च, अ+२च, अ+३च+आदि.....+प यह श्रेढ़ी का स्वरूप हुआ और कल्पना करो कि श्रेढ़ी के पदों का योग य है ॥ तो य = अ+अ+च+अ+२च+अ+३च+आदि—+प श्रेढ़ी के पास के प्रत्येक दो पदों के बीच च अंतर समान है और योग ज श्रेढ़ी में प पिछला पद है इस लिये प−च पद इस के पूर्व होगा और प−च इस पद के पूर्व प−२च यह पद होगा ऐसे ही श्रेढ़ी के और पद होंगे उन को उत्क्रम से लिखा ॥ तो

य = प+प−च+प−२च+आदि.... अ+च+अ और य = अ+अ+च+अ+२च+आदि...प−च+प इन का योग किया तो २य = अ+प+अ+प+अ+प+आदि...अ+प+अ+प श्रेढ़ी में जितने

---

* ९० प्रक्रम ॥

पद होंगे उतने ही बार $\overline{\text{अ}+\text{प}}$ आवेगा और जो ग को गच्छ वा पदों की संख्या मानो ॥ तो

२य = ग बार $\overline{\text{अ}+\text{प}}$ वा ग × (अ + प) इस कारण य = $\frac{1}{2}$ ग (अ + प) ऐसे ही जो अंतर श्रेढ़ी हो तोभी श्रेढ़ी फल वा य = $\frac{1}{2}$ ग (अ + प) ॥

केवल अंतर श्रेढ़ी में योगज श्रेढ़ी की अपेक्षा + च के स्थान में − च होगा और उत्क्रम अंतर श्रेढ़ी में − च के स्थान में + च होगा कारण यह है कि अंतर श्रेढ़ी में कोई पद जैसे प पूर्व पद से च के समान छोटा होगा वा प + च पूर्व पद होगा इस लिये अंतर श्रेढ़ी फल वा य = अ, अ − च, अ − २च, अ − ३च + आदि ... + प ॥

और य = प + $\overline{\text{प}+\text{च}}$ + $\overline{\text{प}+\text{२च}}$ + $\overline{\text{प}+\text{३च}}$ + आदि + अ इन दोनों फलों का योग करने से २य = $\overline{\text{अ}+\text{प}}$ + $\overline{\text{अ}+\text{प}}$ + $\overline{\text{अ}+\text{प}}$ + आदि अ + प श्रेढ़ी में जितने पद होंगे उतने ही बार अ + प आवेगा ॥

और जो ग को गच्छ वा पदों की संख्या मानो तो २य = ग बार $\overline{\text{अ}+\text{प}}$ वा ग (अ + प) इस कारण य = $\frac{1}{2}$ ग (अ + प) ॥

(८२) अ और क दो राशि हैं उन के बीच मध्य पद ढूंढो वा ऐसी राशि निकालो कि जब उन तीनों राशियों को क्रम से रक्खो तो उन में प्रत्येक पास की दो राशियों के बीच समान अंतर हो ॥

कल्पना करो कि य ऐसी राशि है तो अ, य, क, ये श्रेढ़ी पद होंगे और जो योगज श्रेढ़ी होगी तो

य—अ च य होगा और क—य भी चय होगा॥

इस कारण य—अ=क—य

पक्षांतर नयन से २य=अ+क

२का भाग देने से य= $\frac{अ+क}{२}$

इससे यह बात निकली कि जो योगज श्रेढ़ी का अंतर श्रेढ़ी की दो राशियों के बीच मध्य पद निकालना हो तो उन दोनों राशियों का आधा योग—इष्ट मध्य पद होगा॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ६ और २० इन के बीच $\frac{१}{२}$(६+२०) वा १३ मध्य पद होगा अर्थात् ६, १३, २० ये श्रेढ़ी पद हुए अ+क और अ—क इन के बीच $\frac{१}{२}$ (अ+क+अ—क)

वा अ मध्य पद होगा अर्थात्

अ+क, अ, अ—क, ये श्रेढ़ी पद हैं॥

(९४) अ और क दो राशि हैं उन के बीच मध्य पद निकालो वा ऐसी दो राशि ढूंढ़ो कि जब उन चारों राशियों को क्रम से रक्खें तो उन में प्रत्येक पास की दो राशियों के बीच समान अन्तर हो कल्पना करो कि य और र इष्ट राशि हैं तो अ, य, र, क ये श्रेढ़ी पद होंगे और अ और र इन के बीच का मध्य पद य= $\frac{अ+र}{२}$ ऐसे ही य और क इन के बीच का मध्य पद र= $\frac{य+क}{२}$ इन दो समीकरणों से य और र इन का मान लाओ॥

---

* ९३ संक्रम॥

पहिले समीकरण में २ का गुण करने से

$२य = अ + र$ परन्तु दूसरे समीकरण में

$$र = \frac{य+क}{२}$$

इस कारण $२य = अ + \frac{य+क}{२}$ २ से गुण किया तो

$४य = २अ + य + क$ शोधन से

$३य = २अ + क$ ३ का भाग देने से

$$य = \frac{२अ+क}{३}$$

और $२य = अ + र$ यह जो समीकरण पूर्व लिखा है इस में पक्षान्तरानयन और य का मान रखने से

$र = २य - अ = \frac{४अ+२क}{३} - अ = \frac{अ+२क}{३}$ ॥

इसलिये अ, $\frac{२अ+क}{३}$, $\frac{अ+२क}{३}$, क ये श्रेढी पद हैं।

॥ आलाप ॥

$\frac{२अ+क}{३} - अ = \frac{क-अ}{३}$, $\frac{२क+अ}{३} - \frac{२अ+क}{३} = \frac{क-अ}{३}$ और $क - \frac{अ+२क}{३} = \frac{क-अ}{३}$, इससे यह मालूम हुआ कि अ, $\frac{२अ+क}{३}$, $\frac{अ+२क}{३}$, क इन श्रेढी पदों में पास के प्रत्येक दो पदों के बीच समान्तर है वा उन पदों का $\frac{क-अ}{३}$ चय है ॥

८५ प्र॰ अ और क इन के बीच दो मध्य पद निकालने की दूसरी सुगम रीति बतलाते हैं ॥

कल्पना करो कि च चय है तो अ, अ+च, अ+२च

क ये श्रेढ़ी पद होंगे इस कारण इन में पास के प्रत्येक दो पदों के बीच समान अन्तर होगा और समान अन्तर च है ॥

इस कारण च = क − (अ + २च) कोष्ट मिटाने से

च = क − अ − २च पक्षान्तरानयन से

३च = क − अ   ३ का भाग देने से

$$\text{च} = \frac{\text{क} - \text{अ}}{३}$$

इस कारण अ + च, और अ + २च ये मध्य पद तुल्य हैं $\text{अ} + \frac{\text{क} - \text{अ}}{३}$, $\text{अ} + \frac{२\text{क} - \text{अ}}{३}$ वा $\frac{२\text{अ} + \text{क}}{३}$ और $\frac{\text{अ} + २\text{क}}{३}$ इन के ॥

इसी रीति से इष्ट दो राशियों के बीच दो से अधिक मध्य पद निकल सक्ते हैं ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{१}{४}$ और $\frac{१}{२}$ इन के बीच मध्य पद निकालो ॥

मध्य पद* $= \frac{१}{२}\left(\frac{१}{४} + \frac{१}{२}\right) = \frac{१}{२} \times \frac{३}{४} = \frac{३}{८}$ ॥

(२) $\frac{२}{३}$ और $\frac{२१}{६}$ इन के बीच दो मध्य पद निकालो।

कल्पना करो कि य च य) है तो $\frac{२}{३}$, $\frac{२}{३} + \text{य}$, $\frac{२}{३} + २\text{य}$, $\frac{२१}{६}$ ये श्रेढ़ी पद होंगे और इन में पास के प्रत्येक दो पदों के बीच समान अन्तर हैं। इस लिये

$$\text{चयय} = \frac{२१}{६} - \left(\frac{२}{३} + २\text{य}\right)$$

---

* ८३ प्रक्रम ॥

कोष्ठ मिटाने से $= \frac{२१}{६} - \frac{१}{३} - २य$

$= \frac{४}{६} - २य$

पक्षांतर नयनसे $२य = \frac{४}{६}$

२ का भाग देने से $य = \frac{४}{१२} = \frac{१}{३}$

इस लिये $\frac{१}{२} + य$, $\frac{२}{३} + २य$ ये मध्य पद तुल्य हैं $\frac{१}{३} + \frac{१}{२}$ और $\frac{२}{३} + \frac{२}{३}$ वा $\frac{५}{६}$ और $१\frac{१}{३}$ के

इस कारण $\frac{१}{२}, \frac{५}{६}, १\frac{१}{३}, \frac{११}{६}$ ये श्रेढ़ी पद हुए ॥

॥ गुणोत्तर श्रेढ़ी ॥

जब एक पंक्ति में राशि इस क्रम से स्थापित्त हों कि प्रत्येक से पास की राशियों में भाग लेने से समान लब्धि मिलें वा पंक्ति के पहिले पद को किसी एक गुणक से क्रम से गुणा करने से शेष पद उत्पन्न हुए हों तो ऐसी पंक्ति को गुणोत्तर श्रेढ़ी कहेंगे और उस गुणक को गुणोत्तर वा सम्बन्ध चाहे वह पूर्णाङ्क हो वा भिन्न जैसे १, २, ४, ८, १६, यह वर्द्धमान वा बढ़ती गुणोत्तर श्रेढ़ी है कारण यह है कि इस श्रेढ़ी में प्रत्येक पद पूर्व पद से दूना है ऐसे ही १६, ८, ४, २, १, यह क्षीयमाण वा घटती गुणोत्तर श्रेढ़ी है कारण यह है कि इस श्रेढ़ी में प्रत्येक पद पूर्व पद से आधा है पहिली वर्द्धमान श्रेढ़ी में २ गुणोत्तर हैं और दूसरी क्षीयमाण श्रेढ़ी में $\frac{१}{२}$ गुणोत्तर हैं ॥

गुणोत्तर श्रेढ़ी की यह पहचान है कि चाहे जिन दो पास के पदों में पहिले पद का दूसरे पद में भाग देतो लब्धि तुल्य होगी और ऐसी लब्धि को गुणोत्तर बोलते हैं और जो सब लब्धि समान न हों तो गुणोत्तर श्रेढ़ी न जानो ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) १, ३, ९, २७, इस गुणोत्तर श्रेढ़ी में गुणोत्तर क्या है ३ यही गुणोत्तर है ॥

(२) $\frac{३}{२}$, ३, ६, १२, आदि इस श्रेढ़ी में गुणोत्तर क्या है $\frac{६}{३}$ = २ यह गुणोत्तर है ॥

श्रेढ़ी के पहिले पद का दूसरे पद में इस लिये भाग नहीं दिया कि पहिला पद भिन्न है इस लिये सहज में बिना क्रिया बढ़ाये तीसरे पूर्ण पद में दूसरे पद का भाग देके २ गुणोत्तर निकाल लिया ॥

(३) $\frac{२}{३}$ $\frac{१}{२}$ $\frac{३}{८}$ ये गुणोत्तर श्रेढ़ी के पद हैं वा नहीं और जो हैं तो गुणोत्तर बतलाओ कि क्या है ।

$\frac{१}{२} \div \frac{२}{३} = \frac{३}{४}$ और $\frac{३}{८} \div \frac{१}{२} = \frac{३}{४}$ इस लिये $\frac{२}{३}, \frac{१}{२}, \frac{३}{८}$ ये गुणोत्तर श्रेढ़ी के पद हैं और $\frac{३}{४}$ यह गुणोत्तर है ॥

९७ प्र० जो गुणोत्तर श्रेढ़ी का अ आदि पद हो और ग गुणोत्तर हो तो अ, अ.ग, अ.$ग^२$, आदि गुणोत्तर श्रेढ़ी होगी और इस में प्रत्येक पद पूर्व पद से ग गुना है और जो न श्रेढ़ी पद के स्थान की संख्या माने तो सब स्थान का अ $ग^{न-१}$ पद होगा

कारण यह है कि जो तुम स को २ मानो तो $अग^{स-१} = अग^{२-१} = अग$ यह श्रेढ़ी के दूसरे स्थान का पद है ऐसे ही जो स को ३ मानो तो $अग^{स-१} = अग^{३-१} = अग^{२}$ यह श्रेढ़ी के तीसरे स्थान का पद है। जो स को ४ मानो तो $अग^{स-१} = अग^{४-१} = अग^{३}$ यह श्रेढ़ी का चौथा पद है, ग का घात प्रकाशक दूसरे पद में १ है और तीसरे पद में २ है और चौथे पद में ३ है वा पद के स्थान की संख्या से ग का घात प्रकाशक १ कम है ॥

९८ प्र० इस लिये जो गुणोत्तर श्रेढ़ी में आदि पद और गुणोत्तर मालूम हो तो उन से श्रेढ़ी का चाहो सो पद निकाल लो क्योंकि जिस पद को निकाला चाहते हो उस के स्थान की संख्या स हो और अ आदि पद हो और ग गुणोत्तर तो सवें स्थान का पद $= अग^{स-१}$ ॥

॥ उदाहरण ॥

१, ३, ९, २७ आदि गुणोत्तर श्रेढ़ी का आठवां पद निकालो तो अ आदि पद = १ और $\frac{३}{१} = ३$ गुणोत्तर और स = ८

इस लिये $अग^{स-१} = १ \times ३^{८-१} = १ \times ३^{७} = २१८७$ ॥

योग करने की रीति से गुणोत्तर श्रेढ़ी के पदों का योग वा श्रेढ़ी फल मिल सकता है परन्तु जो श्रेढ़ी में बहुत पद हों तो योग करने की रीति से श्रेढ़ीफल लाने में बहुत देर लगेगी और उलझाव होजावे

होगा इस कारण अगले ९६ प्रक्रम में श्रेढ़ी फल लाने की सुगम रीति लिखते हैं ॥

९९ प्र० गुणोत्तर श्रेढ़ी के पदों के योग करने वा श्रेढ़ी फल निकालने की रीति ॥

॥ उपपत्ति ॥

कल्पना करो कि अ, क, घ, च, आदि, म, प, ग गुणोत्तर श्रेढ़ी के पद हैं और ग गुणोत्तर है तो श्रेढ़ी के अ आदि पद को ग गुणोत्तर से गुणा तो अ ग दूसरा पद हुआ परन्तु श्रेढ़ी का क दूसरा पद है।

इस कारण क = अ ग

ऐसे ही घ = क ग

च = घ ग

आदि = आदि

प = म ग

योग करने से क + घ + च + आदि + प = अ ग + क ग + घ ग + आदि + म ग = (अ + क + घ + आदि + म) ग यह प्रथम समीकरण हुआ ॥

जो य को सब पदों का योग वा श्रेढ़ी फल मानो तो अ + क + घ + च + आदि + म + प = य ॥

पक्षान्तर नयन से

क + घ + च + आदि + म + प = य − अ और पक्षान्तर नयन से ही अ + क + घ + आदि + म = य − प ॥

और अ आदि पद है और प अन्त पद ॥

इस लिये प्रथम समीकरण का स्वरूप यह हुआ।

य − अ = (य − प) ग

=पग-पग पक्षान्तरानयन से

यग — य = पग — अ ॥

या (ग-१) य = पग — अ ॥

ग-१ इस का भाग देने से

$$य = \frac{पग - अ}{ग - १}$$ यही श्रेढ़ी फल हुआ ॥

इस लिये जो किसी और गुणोत्तर श्रेढ़ी का फल निकालना हो तो अ आदि पद प अन्त पद, और ग गुणोत्तर इन के स्थान में जो इष्ट श्रेढ़ी में राशि हैं उन को $\frac{पग - अ}{ग - १}$ इस श्रेढ़ी फल में रक्खो तो जो राशि मिले वही इष्ट श्रेढ़ी फल होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

१, २, ४, ८, आदि १०२४ इस श्रेढ़ी का श्रेढ़ी फल निकालो १ आदि पद है $\frac{२}{१}$ वा २ गुणोत्तर है और १०२४ अन्त पद है इस लिये $\frac{पग - अ}{ग - १}$ श्रेढ़ी फल में, अ, ग और प के स्थान में क्रम से १, २, और १०२४ रक्खो तो

$$इष्ट\ श्रेढ़ी\ फल = \frac{१०२४ \times २ - १}{२ - १} = २०४७$$

इस उत्तर की सत्यता जानने के लिये, १, २, ४, ८, १६, ३२, ६४, १२८, २५६, ५१२, १०२४ इस श्रेढ़ी के सब पदों का योग करो और जो योग २०४७ हो तो पूर्व श्रेढ़ी फल को सत्य जानो ॥

१०७ प्र० अ और क इन दो राशियों के बीच मध्य पद निकालो कल्पना करो कि य मध्य पद है तो अ, य, क, ये श्रेढ़ी पद हुए और $\frac{य}{अ}$ = गुणोत्तर ऐसे ही $\frac{क}{य}$ =

६६ प्रक्रम ॥

गुणोत्तर इस लिये $\frac{य}{अ} = \frac{क}{य}$ अय से गुणा करने से $य^2 = अक$ ॥

∴ वर्ग मूल लिया तो $य = \sqrt{अक}$ यह मध्य पद हुआ इस से यह बात निकलती है कि जो गुणोत्तर श्रेढ़ी में दो राशियों के बीच मध्य पद निकालना हो तो दोनों राशियों के घात का वर्ग मूल इष्ट मध्य पद होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) १६ और ६४ के बीच $\sqrt{१६ \times ६४}$ वा $\sqrt{१०२४}$ वा ३२ मध्य पद है अर्थात् १६.३२.६४. ये श्रेढ़ी पद हैं ॥

$\frac{अ}{क}$ और $\frac{क}{अ}$ इन के बीच $\sqrt{\frac{अ}{क} \cdot \frac{क}{अ}}$ वा $\sqrt{१}$ वा १ मध्य पद है अर्थात् $\frac{अ}{क}$ १. $\frac{क}{अ}$. ये श्रेढ़ी पद हैं ॥

१०२ प्र० अ और क इन दो राशियों के बीच दो मध्य पद निकालो ॥

कल्पना करो कि य और र मध्य पद हैं तो अ.य. र.क. ये श्रेढ़ी पद हुए और ग को गुणोत्तर मानो तो अ आदि पद को ग से गुणा। तो

$अ ग = य$ दूसरा पद हुआ इसी रीति से

$य ग = र$ तीसरा पद हुआ

$र ग = क$ चौथा पद हुआ

दूसरे समीकरण को ग से गुणा तो $य ग^2 = र ग = क$ और पहिले समीकरण को $ग^2$ से गुणा तो

$$अ ग^3 = य ग^2 \text{ और } य ग^2 = क$$

इस कारण $अ ग^3 = क$

अ का भाग देने से $ग^3 = \frac{क}{अ}$

घन मूल लिया तो $ग = \sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$

इस लिये $ख = अग = अ\sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$

और $र = खग = अ\sqrt[3]{\frac{क}{अ}} \times \sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$

$= अ\left(\sqrt[3]{\frac{क}{अ}}\right)^2$

१०२ प्र० दो राशियों के बीच दो मध्य पदों को सहज से निकालने की रीति बतलाते हैं ॥

कल्पना करो कि अ और क राशियों के बीच मध्य पद निकालना है और ग गुणोत्तर है तो अ, अग, $अग^2$, क, ये श्रेढ़ी पद होंगे ॥

और $\frac{क}{अग^2}$ = ग गुणोत्तर

$ग^2$ से गुणा किया तो $\frac{क}{अ} = ग^3$

घन मूल लिया तो $ग = \sqrt[3]{\frac{क}{अ}}$

और $अग = अ\sqrt[3]{\frac{क}{न}}$ यह पहिला मध्य पद हुआ।

और $अग^2 = अ\left(\sqrt[3]{\frac{क}{अ}}\right)^2$ यह दूसरा मध्य पद हुआ।

इसी रीति से जो श्रेढ़ी के आदि पद और अन्त पद मालूम हों तो उस से श्रेढ़ी के सब मध्य पद मालूम हो सक्ते हैं ॥

॥ उदाहरण ॥

$\frac{२}{३}$ और $\frac{३}{४}$ इन के बीच का मध्य पद बतलाओ मध्य पद $= \sqrt{\frac{२}{३} \times \frac{३}{४}} = \sqrt{\frac{६}{१२}} = \frac{१}{२}$

* ६६ प्रक्रम ॥

$\frac{१}{९}$ और ३ के बीच दो मध्य पद निकालो।
कल्पना करो कि य गुणोत्तर है तो

$\frac{१}{९}$, $\frac{१}{९}$ य. $\frac{१}{९}$ $य^{२}$. ३ ये श्रेढ़ी पद हुए

और ३ ÷ $\frac{१}{९}$ $य^{२}$ = य गुणोत्तर

वा $\frac{२७}{य^{२}}$ = य

$य^{२}$ से गुणा तो २७ = $य^{३}$

घन मूल लिया तो ३ = य इस लिये ३ गुणोत्तर है

और $\frac{१}{९}$ य = $\frac{१}{९}$ × ३ = $\frac{१}{३}$ पहिला मध्य पद हुआ

और $\frac{१}{९}$ $य^{२}$ = $\frac{१}{९}$ × $३^{२}$ = १ दूसरा मध्य पद हुआ

इस कारण $\frac{१}{९}$, $\frac{१}{३}$, १. ३ ये श्रेढ़ी पद हुए ॥

॥ २१ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

नीचे जो तीन श्रेढ़ी लिखी हैं उन में प्रत्येक श्रेढ़ी का पांचवां और वीसवां पद बतलाओ ॥

(१) २. ६. १८. आदि

(२) १६. १२. ९. आदि

(३) $\frac{१}{३}$, $\frac{२}{३}$, २. आदि

नीचे जो सात श्रेढ़ी लिखी हैं उन में प्रत्येक श्रेढ़ी के वीसवें पद तक का श्रेढ़ी फल बताओ ॥

(४) १. ३. ५. ७. आदि

(५) ५. ८. ११. १४. आदि

(६) १००. ११०. १२०. आदि

(७) १००. ९७. ९४. आदि

(८) १५. ११. ७. आदि

(९) $\frac{३}{२}$, $\frac{३}{४}$, ०. आदि

(२०) १२. १२$\frac{1}{3}$. १२$\frac{2}{3}$. आदि

(२१) एक बनिये ने गल्ले में कुछ रुपये पैसे वर्ष दिन वा ३६५ दिन में इसी रीति से इकट्ठे किये कि पहिले दिन उस ने $\frac{1}{4}$ पाई के बराबर कौड़ियां गल्ले में डाली और दूसरे दिन $\frac{1}{2}$ पाई की कौड़ियां तीसरे दिन $\frac{3}{4}$ पाई की कौड़ियां और चौथे दिन एक पाई परन्तु ७वें दिन या रविवार को नागा की ऐसे ही उस बनिये ने क्रम से गल्ले में धन डाला और हर रविवार को नागा रक्खी तो बतलाओ कि उस ने ३६५ दिन में कितना धन इकट्ठा किया और जो वह इसी क्रम से धन गल्ले में डाले तो वह पचीसवें अठवारे को कितना धन गल्ले में डालेगा ॥

(२२) एक ऋणी ने अपना ऋण २५ अठवारों में इस रीति से चुकाया है कि पहिले अठवारे को उस ने अपने धनी को २ आने दिये और दूसरे अठवारे को ५ आने और तीसरे अठवारे को ८ आने इसी क्रम से उस ऋणी ने अपने धनी का सब ऋण २५ अठवारों में चुका दिया तो बतलाओ कि उस को कितना ऋण चुकाना था ॥

(२३) दिन के १२ बजे से रात्रि के १२ बजे तक १२ घण्टे बजते हैं तो बतलाओ कि इतने समय में घण्टे पर कितनी मोंगरियां पड़ी होंगी. तुम यह अच्छी रीति से जानते हो कि जब एक बजता है तो घण्टे पर केवल एक मोंगरी पड़ती है और जब दो बजते हैं तो घण्टे पर दो मोंगरी लगानी होती हैं इसी रीति

से जे घण्टे बजाने होते हैं उतनी ही मोंगरियां ब
ण्टे पर लगाते हैं ॥

(२४) २०० पत्थर की कन्तलों को एक सीध में दो
२ हाथ के अन्तर से रक्खा और उसी सीध में पहि
ली कन्तल से ६० हाथ दूर एक डलिया रक्खी फिर
एक मनुष्य डलिया के पास से चलकर पहिली
कन्तल के पास जो ६० हाथ दूर थी उस कन्तल को
उठाके लौटकर डलिया में धर गया और फिर
डलिया के पास से चलकर दूसरी कन्तल के पास आ
या जो पहिली कन्तल से २ हाथ दूर पर रक्खी थी
इसे लौट कर डलिया में रख गया इसी रीति से उस
मनुष्य ने डलिया जहाँ रक्खी थी वही रहने दी औ
र उस के पास चलकर क्रम से सब कन्तलों को बटो
र कर उसी डलिया में रख दी तो बतलाओ कि
उस मनुष्य को इस एरा फेरी में कितना चलना पड़ा।

(२५) गुणोत्तर श्रेढ़ी के $\frac{१}{३}$ और $\frac{२}{३}$ ये दो पहिले
पद हैं तो बतलाओ कि गुणोत्तर क्या है और श्रेढ़ी
का तीसरा पद कौन सा है ॥

(२६) $\frac{२}{४}$ और $\frac{५}{८}$ इन के बीच गुणोत्तर श्रेढ़ी का
मध्य पद क्या होगा और उन हीं दोनों भिन्नों के बीच
अन्तर श्रेढ़ी का मध्य पद क्या होगा ॥

(२७) १ और ३ इन के बीच के ३ योगज श्रेढ़ी के
मध्य पद बतलाओ ॥

(२८) १०० और ८० इन के बीच के ४ अन्तर श्रेढ़ी
के मध्य पद बतलाओ ॥

(१९) ५ और ३२० इन के बीच के २ गुणोत्तर श्रेढ़ी के
मध्य पद निकालो ॥

(२०) १०० और २ $\frac{२४}{२५}$ इन के बीच के ३ गुणोत्तर
श्रेढ़ी के मध्य पद निकालो ॥

(२१) एक ऋणी ने अपना ऋण चुकाने का यह
बन्धान किया कि उसने पहिले अठवारे को ५ आने
दिये और दूसरे अठवारे को ८ आने दिये इसी री
ति से उसने प्रत्येक अठवारे में क्रम से ३ आने की
बढ़ती से ऋण चुकाया और उसने अन्त के अठवा
रे को १८॥।=) आना दिये तो बतलाओ कि उसने
कितना ऋण कितने अठवारों में चुकाया ॥

(२२) एक व्योपारी ने व्योपार किया तो पहले बर्ष
में उसे केवल १००) नफ़ा के मिले और दूसरे बर्ष
में १३०) नफ़ा के मिले तीसरे बर्ष में १६०) नफ़ा
के मिले इसी क्रम से हर बर्ष में उसे ३०) नफ़ा के
अधिक मिले और अन्त बर्ष में उसे ५५०) नफ़ा
के मिले तो बतलाओ कि उस ने के बर्ष व्योपार
किया ॥

(२३) एक जमींदार ने १० सेर गेहूं बोये और फ़स्ल
में जो गेहूं हुए उन को अगले बर्ष में बोये और दूस
री फ़स्ल में जो गेहूं हुए वे तीसरे बर्ष में बोये फिर
तीसरी फ़स्ल के गेहूंओं को चौथे साल में बोया तो चौथी
फ़स्ल में २२६५६ $\frac{१}{४}$ मन गेहूं हुए और पहिली फ़स्ल
में गेहूं बीज के गेहूं से जे गुने उत्पन्न हुए उतने ही गुने
गेहूं हर फ़स्ल में बीज के गेहूं से उत्पन्न हुए तो

बतलाओ कि हर फ़स्ल के गेहूं बीज के गेहूं से कित
ने गुने अधिक उत्पन्न हुए ॥

(२४) गति विद्या में यह लिखा है कि जो कोई प
दार्थ ऊपर से नीचे को गिरे तो वह पहिले सेकण्ड
वा २ $\frac{१}{२}$ विपल में क़रीब १६ $\frac{३}{२०}$ फुट के गिरेगा और
दूसरे सेकण्ड में १६ $\frac{३}{२०}$ + ३२ $\frac{३}{५}$ फुट गिरेगा और
तीसरे सेकण्ड में १६ $\frac{३}{२०}$ + ३२ $\frac{२}{५}$ + ३२ $\frac{२}{५}$ फुट गिरे
गा इसी क्रम से वह पदार्थ प्रत्येक सेकण्ड में ३२ $\frac{२}{५}$
फुट की बढ़ती से गिरेगा और हवा में ऊपर बुर्ज
चढ़ा या उस में से कुछ भारी बोझ नीचे को गिरा औ
र वह २० सेकण्ड में धरती पर आ पहुंचा तो बतला
ओ कि ऊपर जो हिसाब लिखा है उस के अनुसार
बुर्ज धरती से कितना ऊंचा होगा स्मरण रखो कि इस
गणित में हवा की रोक का कुछ परिमाण नहीं
लिया है ॥

॥ मिश्र प्रश्न ॥

नीचे जो बीजात्मक राशि लिखी हैं उन का लघुतम रूप करो।

(१) (२ग-३र)य-(ग-२)य-(ग-२र)य-य ॥

(२) (ब-क)य^{२}-(ब+क)य^{२}+३कय^{२}-२य^{३} ॥

(३) (अ-२प)य^{३}+(अ+२प)य^{२}-(प-अ)य^{२}-य^{३} ॥

(४) बतलाओ कि $\frac{१}{अ-क}$ यह $\frac{१}{अ}$ - $\frac{१}{क}$ इसके तुल्य है ॥

(५) बतलाओ कि $\frac{अ-क}{य}$ यह $\frac{अ}{य}$ - $\frac{क}{य}$ इसके तुल्य है ॥

(६) जो अ=क=-ग वा अ, क, -ग ये तीनों राशि तुल्य

हों तो बतलाओ कि $\frac{अक^२ - २अक + ग^२}{क^२ - ३कग + ग^२}$ इस का क्या मान है ॥

(७) $२(अ+क) - ३(ग-घ)$ इस में से $अ+क-४(ग-घ)$ इस को घटाओ ॥

(८) $(अ+क)य + (क+ग)र$ इस में से $(अ-क)य - (क-ग)र$ इस को घटाओ ॥

(९) $६य - \frac{२य}{क}$ इस में से $५\frac{१}{२}ग - \frac{अ}{क}$ इस को घटाओ ॥

(१०) $\frac{य+५}{४(य-२)}$ इस में से $\frac{५य-२५}{४(य-२)}$ इस को घटाओ॥

(११) $\frac{न}{न+१}$ और $\frac{न^२}{न+१}$ इन का योग करो ॥

(१२) $\frac{य}{२} + \frac{य}{३}$ इन को ६ से गुण दो ॥

(१३) $१ + य$ इस में $\frac{१}{य} + १$ इस का भाग दो ॥

(१४) $अ^४ + ४क^४$ इस में $अ^२ - २अक + २क^२$ इस का भाग दो ॥

(१५) $७य + य - ५य^२ - ३य$ इस में $१ - ३य$ का भाग दो।

(१६) $अ + क + \frac{अ^२}{क}$ इस में $अ + क + \frac{क^२}{अ}$ इस का भाग दो।

(१७) $अ - \frac{१}{२}(अ - \frac{२}{३}क)$ इस में $क - \frac{१}{३}(अ + \frac{३}{२}क)$ इस का भाग दो ॥

(१८) $य + १ + \frac{२}{य}$ इस को $य - १ + \frac{२}{य}$ इस से गुण दो।

(१९) $अ^४ - \frac{१}{अ^४}$ इस में $अ - \frac{१}{अ}$ इस का भाग दो ॥

(२०) $\frac{२}{३}य - \frac{२}{य}$ इसका वर्ग करो ॥

(२१) $(अय + अ^२ + य^२)(य - अ)(य^२ - अय + अ^२)(अ + य)$ इस क्रम से गुणन का घात निकालो ॥

(२२) $अ - क$ इसमें $\sqrt{अ} - \sqrt{क}$ इसका भाग दो ॥

(२३) $\frac{२}{३}\frac{२य+३र}{२य-३र}$ और $\frac{३}{२}\frac{२य-३र}{२य+३र}$ इन का योग करो ॥

(२४) $\frac{य(य+१)(य+२)}{३} - \frac{य(य+१)(२य+१)}{१\times२\times३}$ ॥

॥ नीचे जो समीकरण लिखे हैं उन में अव्यक्त राशि का मान बतलाओ ॥

(२५) $\frac{३०}{य+१} = \frac{२५}{य-२}$ ॥

(२६) $\frac{१२८}{३य-४} = \frac{२१६}{५य-६}$ ॥

(२७) $\frac{४२य}{य-२} = \frac{३५य}{य-२}$ ॥

(२८) $\frac{य^२-६}{३} = \frac{य+३}{४}$ ॥

(२९) $\frac{३}{य+१} = ८-२$ ॥

(३०) $\frac{३}{१-३य} - \frac{४}{१-२य} = \frac{५}{५य-१}$ ॥

(३१) $\frac{१}{य+३} + \frac{२}{य+६} = \frac{३}{य+५}$ ॥

(३२) $\frac{१}{४}\left\{३य-\frac{१}{३}(य-२)\right\}=\frac{५}{६}य-१$ ॥

(३३) $\frac{य-३}{२\frac{१}{२}}-\frac{य-४}{६\frac{१}{२}}=\frac{१४-य}{५}$ ॥

(३४) $\frac{२य-१}{२य+१}+\frac{२य+१}{२य-१}=३$ ॥

(३५) $\frac{४८}{य+३}=\frac{१६५}{य+१०}-५$ ॥

(३६) $३\left(य-\frac{३}{४}\right)-\frac{य-२}{य+२}=५$ ॥

(३७) $\frac{१\frac{१}{२}}{५-य}+\frac{१}{४-य}=\frac{४}{२+य}$ ॥

(३८) $\frac{७य+१}{६\frac{१}{२}-३य}=\frac{८०}{३}\left(\frac{य-\frac{१}{२}}{य-\frac{१}{३}}\right)$ ॥

(३९) $\frac{१}{२}(य-१)(य-२)=२\frac{१}{४}\left(य-२\frac{२}{३}\right)$ ॥

(४०) $\frac{१}{२}(य+३)(२य-५)=६\frac{२}{५}\left(२य-६\frac{२४}{३२}\right)$ ॥

(४१) $\frac{२य(अ-य)}{३अ-२य}=\frac{अ}{४}$ ॥

(४२) $\frac{य^{४}+३य^{२}+६}{य^{२}+य-४}=य^{२}+२य+१५$ ॥

(४३) $\left.\begin{array}{l}१३य+१३५र=३७४\\ ११३य+३०८र=१६००\end{array}\right\}$

(४४) $\left.\begin{array}{l} २१य + १९र = २०१ \\ २९य - ३७र = ५ \end{array}\right\}$

(४५) $\left.\begin{array}{l} ५६य + २७८ = ४७(य + र) \\ २८र + ८३२ = १७(य - र) \end{array}\right\}$

(४६) $\left.\begin{array}{l} २य + ३र = २\frac{२}{५}(य + ४) \\ ३(य + र) = ५(य - र) \end{array}\right\}$

(४७) $\left.\begin{array}{l} ५\left(\frac{२}{२}य - ९\right) = \frac{३}{५}(र + १) - \frac{१}{२} \\ \frac{१}{२}(र - ५) = ३\frac{१}{३}\left(२\frac{१}{५} - \frac{१}{१०}य\right) \end{array}\right\}$

(४८) $\left.\begin{array}{l} \frac{य + २}{र + २} = \frac{१}{२} \\ \frac{य - २}{र - २} = \frac{१}{३} \end{array}\right\}$

(४९) $\left.\begin{array}{l} \frac{य + २}{र + ६} = \frac{१}{२} \\ \frac{य - २}{र + ३} = \frac{२}{३} \end{array}\right\}$

(५०) $\left.\begin{array}{l} \frac{य + ७}{र} = \frac{३}{२} \\ \frac{य}{र + १०} = \frac{१}{२} \end{array}\right\}$

(५१) $\left.\begin{array}{l} \frac{य}{र} + य + यर = १३ \\ य^{२} = ९ \end{array}\right\}$

(५२) जल में १ बांस गड़ा था उस का $\frac{१}{५}$ भाग जल में धरती के नीचे गड़ा था और उस का $\frac{१}{६}$ भाग जल के भीतर था और १३ हाथ जल से ऊपर था तो बतलाओ कि बांस कितने हाथ लम्बा था ॥

(५३) दो मनुष्य साझी थे उन में पहला मनुष्य $\frac{१}{२}$ भाग का साझी था और दूसरा मनुष्य $\frac{१}{५}$ भाग का साझी था और दूसरे मनुष्य का जितना रुपया साझे में लगा था उस से २०००) अधिक पहले मनुष्य का साझे का धन था तो बतलाओ कि साझे का सर्व धन क्या होगा ॥

(५४) एक मण्डली में सब पुरुष स्त्रियां और लड़के मिलकर ९० थे और ४ पुरुष स्त्रियों से अधिक थे और जितने पुरुष और स्त्रियां मिलकर थीं उन से १० अधिक लड़के थे तो बतलाओ कि कितने पुरुष, कितनी स्त्रियां और कितने लड़के थे ॥

(५५) एक पुरुष की अब ४० वर्ष की अवस्था है और उस के पुत्र की ६ वर्ष की अवस्था है तो अब पिता की अवस्था पुत्र की अवस्था से ४ गुनी अधिक है तो बतलाओ कि कितने वर्ष पीछे पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से केवल दूनी रह जायगी ॥

(५६) दो बढ़ैयों ने मिलकर काम किया और उन को ७।-) मजदूरी के मिले और उन में १ मनुष्य ने २५ दिन काम किया और दूसरे ने २४ दिन और जो पहले मनुष्य को ६ दिन में मिला इस से १२ आने

कम दूसरे मनुष्य को २ दिन में मिला तो बतलाओ कि हर मनुष्य को क्या रोज मिला होगा ॥

(५७) ७ घोड़े और ४ गाय ने मिलकर एक घास के ढेर को १० दिन में खा डाला और जो केवल २ घोड़े उसी ढेर को ४० दिन में खा जाते तो बतलाओ कि केवल २ गाय वैसे ढेर को कितने दिन में खायगी ॥

(५८) एक बुद्धिमान मनुष्य से पूछा कि कहो जो तुम्हारी, तुम्हारे पिता की और तुम्हारे दादा जी की कितनी २ अवस्था हैं उसने उत्तर दिया कि मेरी अवस्था और मेरे पिता की अवस्था मिलकर ५६ वर्ष के समान है और मेरी अवस्था और मेरे दादाजी की अवस्था ८५ वर्ष के तुल्य है और मेरे पिता की अवस्था और मेरे दादाजी की अवस्था १०१ वर्ष के समान है तो बतलाओ कि तीनों पुरुष की न्यारी २ कितनी अवस्था होंगी ॥

(५९) एक लड़के ने ५ आने के सङ्गतरे और मीठे मोल लिये और एक सङ्गतरा आध आने का पड़ा और एक मीठा ¼ पाई को पड़ा पर उसने दोनों के दाम को ३ भाग से सङ्गतरे और आधे मीठे २ आने को बेंच दिये तो बतलाओ कि उस लड़के ने कितने सङ्गतरे मोल लिये और कितने मीठे ॥

(६०) एक मेदा वाले ने बहुत अच्छी ४ मन सूजी फी मन ५।) के भाव की बनाई परन्तु जब उसने देखा कि सूजी का भारी मोल सुन कर ख़रीदार चौंक जाते हैं तो उस ने यह उपाय किया कि उस चोखी ४ मन सूजी में फी मन ३।) भाव का चोखा रवा मिला दिया फिर इस

रवा मिली सूजी को ३।=) की मन भर इस हिसाब से बेंच डाली तो बतलाओ कि उसने कितना रवा मिलाया होगा ॥

(६१) (न) राशि के ऐसे दो खण्ड करो कि उन में एक खण्ड दूसरे खण्ड से न गुना हो ॥

(६२) एक दयावान मनुष्य ने विचारा कि दीन मनुष्यों को २॥ आने की जिन्स आदमी पीछे दिलवा दूं परन्तु उसने जब हिसाब किया तो मालूम हुआ कि उस के पास २ आने कम हैं इस कारण उसने हर एक दीन मनुष्यों को २ आने की जिन्स दिलवा दी और इस पीछे उस के पास ४ आने बच रहे तो बतलाओ कि उस ने कितने दीनों का सत्कार किया और उस में क्या उठा।

(६३) एक हिरन शिकारी कुत्ते से अपने ५० छलांग के अनुमान आगे था और जितने समय में कुत्ता ३ छलांग भरता उतने ही समय में हिरन ४ छलांग भरता परन्तु कुत्ते की २ छलांग और हिरन की तीन छलांग बराबर थी तो बतलाओ कि कितनी छलांगों में कुत्ता हिरन को पकड़ लेगा ॥

(६४) एक द्रव्यवान मनुष्य के पास जो धन था उसने अपने बेटों के बीच उस धन को इस रीति से बांट दिया कि सब से बड़े लड़के को सर्व धन में से २००) रुपये मिले और जो शेष रहा उस का दशांश मिला तिस पीछे जो बचा उस में से दूसरे लड़के को ३००) मिले और जो शेष रहा उस का दशांश मिला फिर जो धन बचा उस में से तीसरे लड़के को ३००) मिले और

जो शेष रहा उस का दशांश मिला इस रीति से उसने अपने और सब लड़कों को धन बांट दिया परन्तु सब को बराबर ही धन मिला तो बतलाओ कि उस धनी के कितने लड़के थे और उस के पास कितना धन था ॥

(६५) सेज़ गाड़ी के अगले पहिये पिछले पहियों से छोटे होते हैं एक सेज गाड़ी में ऐसी कल लगी थी कि उस्से जितने बार अगले पहिये पिछले पहियों से अधिक घूमते हैं उस का परिमाण मालूम होजाता और अगले पहिये का घेर ५ ३/४ फ़ुट था और पिछले पहिये का घेर ७ २/३ फ़ुट था तो बतलाओ कि जब अगले पहिये पिछले पहियों से २००० बार अधिक घूमें तो सेज गाड़ी कितनी दूर चली होगी ॥

(६६) एक मनुष्य के पास कुछ रुपये थे उस ने उन को धरती में पास २ इस रीति से रक्खा कि उन से वर्ग क्षेत्र का स्वरूप बन गया और इस पीछे उस के पास १३४) बच रहे फिर उस ने शेष रुपये इस रीति से पूर दिये कि वर्ग क्षेत्र के प्रत्येक भुज में ३) पास २ और रक्खे गये तिस पर भी वर्ग क्षेत्र का स्वरूप बना रहा और शेष रुपयों में से ३१) बच रहे तो बतलाओ कि उस मनुष्य के पास सब कितने रुपये थे ॥

(६७) एक तबंगर गड़रिये ने ९६) की बराबर दामों की बकरियां मोल लीं परन्तु उन में ७ बकरियों को चोर लेगये फिर जो शेष बचीं उन में से चौथाई बकरियों को वे तफ़ग़ २७) को बेंच डालीं तो बतलाओ कि उस गड़रिये ने कितनी बकरियां मोल लीं ॥

(६८) सन्दूक़ के तीनों खानों में ९६) रुपये रक्खे थे कि हर एक खाने में बराबर रखने के लिये दूसरे ओर तीसरे खानों में जितने २ रुपये थे उन के आधे आध रुपये पहले खाने में से निकाल कर दूसरे और तीसरे खानों के रुपयों में मिला दिये फिर इस रीति से पहले और तीसरे खानों में जितने २ रुपये हो गये उन के आधे आध रुपये दूसरे खाने में से निकालकर पहले और तीसरे खानों के रुपयों में मिला दिये और फिर जब पहले और दूसरे खानों में जितने २ रुपये होगये उन के आधे २ रुपये तीसरे खाने से निकालकर पहले और दूसरे खानों के रुपयों में मिलादिये तिस पीछे तीनों खानों में बराबर रुपये होगये तो बतलाओ कि पहले हर एक खाने में कितने २ रुपये रक्खे थे।

(६९) एक मनुष्य ने दरयाई कपड़ा कई गज़ २५ रुपये को ख़रीदा और दूसरे मनुष्य ने २५ ही रुपये को पहले मनुष्य की अपेक्षा २ गज़ कम दरयाई कपड़ा मोल लिया इस लिये इस मनुष्य को २ आने गज़ के दाम सिवाय देने पड़े तो बतलाओ कि पहले मनुष्य ने कितने गज़ कपड़ा ख़रीदा होगा ॥

(७०) १०० के ऐसे खण्ड करो कि उन खण्डों के वर्गों का अन्तर ४०० है ॥

(७१) दो ऐसे भिन्न हैं कि उन का योग $\frac{६३}{६३}$ है और उन का अन्तर $\frac{१}{६३}$ और उन्हीं भिन्नों के अंशों का योग ८ है और उन के हरों का योग २६ है तो बतलाओ कि वे कौन से भिन्न हैं ॥

(७२) एक मनुष्य के पैरों में चलने २ छाले पड़ गये और जब वह बदाऊं से चला तो वह पहले दिन बड़ी मुश्किल से १ कोस चला और फिर टिक रहा और दूसरे दिन ३ कोस चलकर रह गया और तीसरे दिन ५ कोस चलकर टिक रहा इसी रीति से वह मनुष्य २ कोस की बढ़ती से चला, जब इस मनुष्य को ३ दिन बदाऊं से चले हो गये तिस पीछे एक दूसरा मनुष्य उसी राह बदाऊं से चला और वह पहले दिन २२ कोस आया दूसरे दिन २३ कोस चला इस क्रम से वह मनुष्य हर दिन १ कोस की बढ़ती से चला तो बतलाओ कि पहिले उन दोनों मनुष्यों की भेंट राह में कोन से दिन हुई और किस दिन उन दोनों की चाल बराबर हो गई और जिस के उपरान्त किस दिन पहले मनुष्य की चाल दूसरे मनुष्य की चाल से अधिक हो गई और जिस दिन वे बराबर चले उस दिन कितने कोस चले ॥

(७३) एक शाला में लड़कों के ३ वर्ग वा दफ़ए थीं उन में जो विद्यार्थी थे, उन की संख्या में ऐसा सम्बन्ध था जो ५, ७, और ८ इन संख्याओं में है एक वर्ष पीछे उस शाला के पहिले वर्ग में जितने पहिले लड़के थे उन से चार और लड़के अधिक हो गये और दूसरे वर्ग में जितने लड़के थे उन के दो सप्तमांश और बढ़ गये और तीसरे वर्ग में जितने लड़के थे उन के दूने हो गये और तीनों वर्गों में सब लड़के मिलकर ६४ हो गये तो बतलाओ कि पहले तीनों वर्गों में कितने लड़के थे ॥

(७४) चांदी का सजातीय गुरुत्व १०$\frac{१}{२}$ है और तांबे का सजातीय गुरुत्व ९ है और तांबे मिले चांदी का सजातीय गुरुत्व ९$\frac{२}{११}$ है तो बतलाओ कि २४८ तांबे मिली चांदी में कितनी चांदी होगी और कितना तांबा।

(७५) जो अ : क :: क : ग और जो क : ग :: ग : घ तो बतलाओ कि अ : घ :: $अ^३ : क^३$ और अ + क : क + ग :: क + ग : ग + घ ॥

(७६) जो ६ य − अ : ४ य − क :: २ य + क : २ य + अ तो बतलाओ कि य किस के तुल्य होगा ॥

(७७) जो अ : क :: ग : घ तो बतलाओ कि अ : अ + क :: अ + ग : अ + क + ग + घ ॥

(७८) २० के ऐसे तीन खण्ड करो कि पहिले और दूसरे खण्ड का सम्बन्ध २ : ५ इस सम्बन्ध के समान हो और दूसरे और तीसरे खण्ड का सम्बन्ध ५ : ३ इस सम्बन्ध के तुल्य हो ॥

(७९) ऐसी दो संख्या कौन सी हैं कि उन का सम्बन्ध १$\frac{१}{२}$: २$\frac{१}{३}$ इस सम्बन्ध के समान हो और जो उन दोनों संख्याओं में १४ जोड़ दें तो उन का सम्बन्ध १$\frac{१}{३}$: २$\frac{१}{२}$ इस सम्बन्ध के समान हो ॥

(८०) गोल के घन फल और उस के व्यास के घन में क्रम रूपान्तर सम्बन्ध है अर्थात् एक गोल का घन फल दूसरे गोल के घन फल से वह सम्बन्ध रक्खेगा जो पहले गोल का व्यास दूसरे गोल के व्यास से रखता होगा तो जो एक गोल का ६ अंगुल का व्यास हो और दूसरे गोल का ४ अंगुल का व्यास होतो

बतलाओ तो किन्हीं दोनों गोलों के घन फलों में क्या संबन्ध होगा ॥

(७२) दृष्टिविद्या शास्त्र विषय में यह लिखा है कि स्वप्रकाश पदार्थों के प्रकाश के परिमाण और उन के अंतर वा दूरी के वर्ग में उतक्रम रूपान्तर का सम्बन्ध रहता है अर्थात् जो कोई पदार्थ स्वप्रकाश जैसा सूर्य अग्नि आदि से जो अधिक दूर होगा तो उसको स्वप्रकाश पदार्थ का उजाला भी पूर्वोक्त गणित से कम दिखाई देगा. एक दीवे से ८ अंगुल के अंतर पर एक पुस्तक धरी है तो बतलाओ कि उस पुस्तक को कितनी दूर और हटाकर रक्खें जिससे पुस्तक पर पहले से आधा उजाला पड़े ॥

(७३) यदि घन क्षेत्र जैसा गोल लाठी गोल लेखनी जो सीधी एकसी मोटी है आदि. के घन फल में और उस की उच्छ्रिति वा ऊंचाई और उस के आधार वा एक छोर के वृत्त के व्यास के वर्ग दल के घात में क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध रहता है वा जो उच्छ्रिति और व्यास का वर्ग दल का घात जै गुणा घटैगा वा बढ़ैगा उतने ही गुणा घन फल भी घटेगा वा बढ़ेगा तो बतलाओ कि जब एक यष्टि घन क्षेत्र की ऊंचाई दूसरे यष्टि घन क्षेत्र की ऊंचाई से दूनी हो परन्तु उस का व्यास दूसरे यष्टि घन क्षेत्र के व्यास से आधा हो तो उन दोनों यष्टि घन क्षेत्रों के घन फलों में क्या सम्बन्ध होगा ॥

(७४) एक बनिये ने पहले महीने में ५ पाई के अनुमान नाके में कौड़ियां डालीं और दूसरे महीने में

१ पाई गल्ले में डाली और तीसरे महीने में ४ पाई गल्ले में डालीं इसी रीति से उसने चौगुनी वृद्धि से धन गल्ले में १२ महीने तक डाला तो बतलाओ कि गल्ले में १२ महीने में कितना धन इकट्ठा हुआ होगा॥

(८४) चार नगरी के मनुष्यों की संख्या इस क्रम से है कि पहिली नगरी में ५३०० मनुष्य हैं दूसरी नगरी में २६४० मनुष्य हैं तीसरी नगरी में १८७० मनुष्य हैं और चौथी नगरी में ६८० मनुष्य हैं तो बतलाओ कि जो २५० जवान पुलिस के इन नगरियों में चौकसाई के लिये भेजे जांय तो हर नगरी में उन मनुष्यों की संख्या के अनुसार कितने २ सिपाही भेजे जांयगे॥

(८५) धातु के दो गोल हैं उन में पहिले गोल का ६ अंगुल का व्यास है और दूसरे गोल का ७ अंगुल का व्यास है तो बतलाओ कि जो उन धातों के दोनों गोल को गला के एक गोल बनावें तो इस गोल का कितना व्यास होगा परन्तु यह स्मरण रक्खो कि दो गोल के घन फलों में और उन के व्यास के घनों में क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध रहता है वा जितना व्यास का घन जे गुना बढ़ जायगा वा घट जायगा उतने ही गुना घन फल भी बढ़ जायगा वा घट जायगा॥

(८६) सम्वत् १९०० में कार्तिक सुदी पड़वा को एक धनी ने ग़रीब ब्राह्मण को इतना द्रव्य दिया कि वह जितने वर्ष की धनी की अवस्था थी उस संख्या के ४ गुनी पाइयों के तुल्य था और फिर दूसरे सम्वत् १९०१ में कार्तिक सुदी पड़वा को उस धनी ने उसी ग़रीब ब्राह्मण

को इतना धन पुण्य में दिया कि वह जितने वर्ष की अव
स्था धनी की उस सम्बत में थी उस संख्या के ४ गुनी पा
इयों के तुल्य था इसी रीति से उस धनी ने उसी दीन ब्रा
ह्मण को १९०७ तक पुण्य किया और तिस पीछे मर
गया तो बतलाओ कि उस धनी ने सब कितना धन पु
ण्य किया और जब वह मर गया तब उस की क्या अव
स्था होगी और उस का जन्म कौन से सम्वत में हुआ होगा

॥ १ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं
उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१)	य=१२ र=५	(९)	य=२ र=३
(२)	य=१० र=२	(१०)	य=११ र=७
(३)	य=६ र=२	(११)	य=$\frac{२}{४}$ र=$\frac{१}{५}$
(४)	य=३ र=१	(१२)	य=५ र=४
(५)	य=१ र=२	(१३)	य=१० र=७
(६)	य=७ र=१०	(१४)	य=५ र=३
(७)	य=४ र=३	(१५)	य=६ र=१०
(८)	य=२ र=३	(१६)	य=३ र=१०

(१७) य = ३, र = $\frac{१}{२}$

(१८) य = ६, र = २

(१९) य = ८, र = ९

(२०) य = ८, र = ८

॥ २ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) य = २, र = २

(२) य = ११, र = ९

(३) य = ६, र = ४

(४) य = ८, र = $\frac{१}{२}$

(५) य = ४, र = २१

(६) य = २४४, र = २२६

(७) य = १४४, र = ७७

(८) य = ४, र = २६

(९) य = ५, र = ६

(१०) य = १३, र = ३

(११) य = ७, र = १०

(१२) य = ७, र = ४

॥ ३ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) २२ और २६

(२) २५ और ३५

(३) ३४ पुरुष और २० स्त्री

(४) १५ पुरुष और २२ स्त्री

५ $\frac{४}{१३}$

(६) $\frac{३}{५}$

(७) २४ और ६

(८) १२ और १८

(९) ११ सेर और ५ सेर

(१०) सम्वत् १७५२ ईसवी॥

॥ ४ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं॥

(१) $२५ अ^२ य^२$

(२) $२५ अ^२ म^२ र^२$

(३) $४९ अ^२ क^६$

(४) $अ^४ क^२ ग^२$

(५) $४९ अ^८ क ग^६$

(६) $\frac{अ^२ क^२}{ग^२}$

(७) $\frac{९ अ^२ य^२}{४ क^२ र^२}$

(८) $\frac{अ^४ क^२}{४ ग^२}$

(९) $\frac{१६ अ^४ क^२}{४९ य^६ र^६}$

(१०) $\frac{९ य^२ र^४}{४ प^४}$

(११) $\frac{१६}{२५ अ^४ क^२ ग^६}$

(१२) $अ^२ + १ + २ अ$

(१३) $अ^२ क^२ + १ + २ अ क$

(१४) $य^२ + ९ + ६ य$

(१५) $४ + र^२ - ४ र$

(१६) $४ म^२ + न^२ - ४ म न$

(१७) $४ य^२ + ९ र^२ - १२ य र$

(१८) $य^२ + \frac{प^२}{४} - प य$

(१९) $य^२ + \frac{९}{४} + ३ य$

(२०) $म^२ य^२ + न^२ + २ म न य$

(२१) $४ म^२ य^२ + म^२ - ४ म न य$

(२२) $अ^२ क^२ य^२ + ग^२ + २ अ क ग य$

(२३) $९ य^२ र^२ + अ^२ - ६ अ य र$

(२४) $\frac{१}{४} अ^२ क^२ + ग^२ + अ क ग$

॥ ५ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं॥

(१) $२ अ क$

(२) $३ य र^२$

(३) $१ अ क^२ ग^३$

(४) $\frac{३ अ य}{२ क}$

(५) $\frac{२ अ क}{३ य र}$

(६) $\frac{१}{२} \frac{म य}{न र}$

(७) $१ - य$

(८) $२ य + १$

(९) $२ अ - क$

(१०) $३ य + २$

(११) $य + \frac{१}{२}$

(१२) $य - \frac{१}{४}$

(१३) $य^२ - १२ य + ३६$

(१४) $य^२ - १४ य + ४९$

(१५) $य^{२} + ११य + \frac{१२१}{४}$ (२०) $य^{२} + \frac{१}{२}य + \frac{१}{१६}$

(१६) $य^{२} + २य + १$ (२१) $य^{२} + \frac{१}{३}य + \frac{१}{३६}$

(१७) $य^{२} - य + \frac{१}{४}$ (२२) $य^{२} + \frac{५}{६}य + \frac{२५}{१४४}$

(१८) $य^{२} + \frac{४य}{५} + \frac{४}{२५}$ (२३) $य^{२} - \frac{३य}{४} + \frac{९}{६४}$

(१९) $य^{२} - \frac{२य}{७} + \frac{१}{४९}$ (२४) $य^{२} - \frac{७य}{२०} + \frac{४९}{४००}$

॥ ६ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) $य = \pm ६$ (५) $य = \pm २$ (९) $य = \pm \frac{१}{२}$

(२) $य = \pm ४$ (६) $य = \pm ५$ (१०) $य = \pm ३$

(३) $य = \pm १$ (७) $य = \pm ५$ (११) $य = \pm २$

(४) $य = \pm ४$ (८) $य = \pm ३$ (१२) $य = १\frac{५}{४}$ वा $\frac{३}{४}$

॥ ॥ ७ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) $य = ५$ वा -२ (४) $य = २०$ वा -६ (७) $य = ६$ वा १

(२) $य = ४$ वा १ (५) $य = २$ वा १० (८) $य = ६$ वा -५

(३) $य = ८$ वा २ (६) $य = २$ (९) $य = १\frac{१}{२}$ वा ३

(१०) $य = ६$ वा $-४\frac{३}{५}$ (१९) $य = १\frac{१}{२}$ वा $-\frac{३}{६}$

(११) $य = ६$ वा $-१०\frac{१}{२}$ (२०) $य = २$ वा $-१\frac{१}{६}$

(१२) $य = १\frac{१}{२}$ वा $\frac{३}{१०}$ (२१) $य = २$ वा $-१\frac{२}{५}$

(१३) $य = \frac{१}{३}$ वा -३ (२२) $य = ४$ वा -२

(१४) $य = ६$ वा $-१०\frac{१}{२}$ (२३) $य = ७$ वा $-\frac{१}{३}$

(१५) $य = ६$ वा $-५\frac{१}{३}$ (२४) $य = १\frac{१}{३}$ वा $-\frac{१}{३}$

(१६) $य = १\frac{१}{२}$ वा $-\frac{२५}{२२}$ (२५) $य = \frac{१}{२}$ वा $-१\frac{१}{३}$

(१७) $य = १$ वा $\frac{१}{७}$ (२६) $य = २$ वा -३

(१८) $य = २\frac{१}{३}$ वा -२ (२७) $य = २$ वा $\frac{१}{१६}$

॥ १९ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) १२ और २३ (२) ३, ४, ५ (३) ४ और १६ (४) १४ और १९६ (५) ५२ और २५ (६) ३० और २० (७) ८ और १८ (८) २३ (९) $\frac{\text{२}}{\text{३}}$

(१०) १३ कोस और २२ कोस फ़ी घंटा

(११) प्रति घंटा ६ कोस

(१२) २५ और २०

(१३) ३८ और ५८

(१४) १८ कोस और १२ कोस

(१५) ४ गज और ५ गज ॥

॥ २० अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) $\frac{\text{२}}{\text{५}}$

(२) $\frac{\text{१}}{\text{५य}}$

(३) $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$

(४) $\frac{\text{अ}}{\text{२}}$

(५) $\frac{\text{अर}}{\text{२}}$

(६) $\frac{\text{१क}}{\text{२अ}}$

(७) $\frac{\text{अय}}{\text{२यं}}$

(८) $\frac{\text{य}}{\text{४र}}$

(९) $\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{ग}}$

(१०) $\frac{\text{२अ}+\text{य}}{\text{ग}}$

(११) $\frac{\text{१}+\text{य}}{\text{२}}$

(१२) $\frac{\text{अ}-\text{क}}{\text{१}}$

(१३) ५ अ : ४

(१४) ८ र : ३ य

(१५) २ अ : ३ क

(१६) ८ र : य

(१७) २८ य : ५ र

(१८) (न − २) य : २ अ

(१९) १६, १७

(२०) ३ अ २ क

(२१) $\text{अ}^{\text{२}} - \text{से}^{\text{२}} = \text{अक}$

(२२) $\text{र}^{\text{२}} = \text{२अप} - \text{मे}$

(२३) ९ : २

(२४) ४ और ६

(२५) २ क र

(२६) २५ और २०

(२७) र = २ अय

(२८) $\text{र} = \frac{\text{५}}{\text{य}}$

॥ ३१ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं॥

(१) २१ और ९६

(२) ३५ और −३

(३) $१\frac{२}{३}$ और $९\frac{२}{३}$

(४) ४००

(५) ९७०

(६) ३९००

(७) १५३९

(८) −४९०

(९) $५७\frac{१}{२}$

(१०) $१९६\frac{२}{३}$

(११) ९३॥।=) $९\frac{१}{४}$ पाई

(१२) ५९।=)

(१३) ७८

(१४) ५२८०० गज

(१५) $१\frac{१}{२}$ और $\frac{३}{४}$

(१६) $\frac{२३}{७२}$ और $\frac{१}{६}$

(१७) $१\frac{१}{२}$, $२.२\frac{१}{२}$

(१८) ९६, ९४, ८८, ८४

(१९) २०, ८०,

(२०) ४०, १९, $६\frac{१}{५}$

(२१) १०० अठन्नी और ९५९।=)

(२२) १६

(२३) १५ गुना

(२४) ६९०० फुट वा $१\frac{१}{५}$ मील

॥ मिश्र प्रश्न जो लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं॥

(१) $-२य$

(२) $(क-२)य^{२}$

(३) $(२अ-य-१)य^{२}$

(४) नहीं

(५) हां

(६) $\frac{३अ+१}{६}$

(७) $अ+क+ग-घ$

(८) $२कख+२कर$

(९) $\frac{१}{२}अ-\frac{अ}{क}$

(१०) $\frac{५-अ}{अ-१}$

(११) न

(१२) ५य

(१३) य

(१४) $अ^{२}+२अक+२क^{२}$

(१५) $य^{३}-२य^{२}+य$

(१६) $\frac{अ}{क}$

(१७) $\frac{३अ+२क}{३क-२अ}$

(१८) $य^{२}+\frac{१}{य^{२}}+१$

(१९) $अ^{३}+\frac{१}{अ^{२}}+\frac{१}{अ}$

(२०) $\frac{य^{२}}{४}+\frac{न}{य^{२}}-१$

=१००) और ६ लड़के

(६५) ३६९०० फुट वा १२३०० गज़ वा ७ १/२ मील और २२० गज़

(६६) ३५५

(६७) ४७

(६८) ७०), ५२), ६०)

(६९) १६

(७०) ५२ और ४८

(७१) $\frac{३}{७}$ और $\frac{५}{६}$

(७२) २ दिन पीछे भेंट हुई और नवें दिन दोनों १७ कोस चले

(७३) १५, २१, २५

(७४) ११२ सेर चांदी और ३६ सेर तांबा

(७७) $य = \frac{अ^२ - क^२}{४अ - क}$

(७८) ४, १०, ६

(७९) २७, ४८

(८०) १ : ८

(८१) ३.३१३७ अंगुल

(८२) १ : २

(८३) ७२८१॥) ५¼ पाई

(८४) १२३, ६८, २६, ४३

(८५) ८, २४ अंगुल

(८६) ६३ वर्ष जन्म सं. १८५५

॥ इति ॥

लिखितं नागर ब्राह्मण

सुकदेव